



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

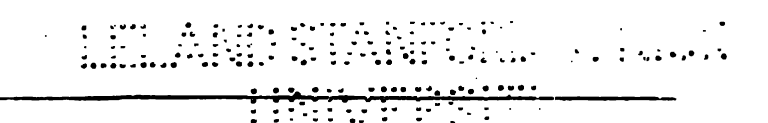
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Sechs und zwanzigster Band.

In vier Heften.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Berlin, 1843.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustin No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des sechs und zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

1.

Ueber derivirte Linien.

(Vom Herrn Oberlehrer Dr. *Druckenmüller* zu Düsseldorf.)

---

§. 1.

Wenn eine algebraische Curve der Art nach bestimmt, der Gröfse und Lage nach aber von der Lage eines einzelnen Punctes abhängig ist, so werden die Coëfficienten ihrer Gleichung gewisse Functionen der Coordinaten dieses Punctes sein. Wir können also diese Gleichung allgemein durch

$$1. \quad F(x,y;\; x',y') = 0$$

darstellen, wo wir durch x, y die veränderlichen, durch x', y' die bestimmten Coordinaten eines Punctes bezeichnen. Indem wir x', y' in der Gleichung (1.) durch die veränderlichen Coordinaten ersetzen, gelangen wir zu der Curve

$$2. \quad F(x,y;\; x,y) = 0,$$

welche zu (1.) in mehren bemerkenswerthen Beziehungen steht und durch sie vollkommen bestimmt ist. Wir erlauben uns, eine schon sonst gebräuchliche Ausdrucksweise zu verallgemeinern und die Curve (2.) die *Directrix*, den Punct $x'y'$ aber den *Pol* von (1.) zu nennen; die Curve (1.) heifse ferner die *Derivirte* ihres Poles in Bezug auf die Directrix (2.), wobei wir durch diese Benennung nur im Allgemeinen die Abhängigkeit der Linie (1.) von der Directrix und der Lage ihres Poles bezeichnen wollen.

Zu jedem Pole gehören in Bezug auf eine gegebene Directrix unendlich viele Derivirte, also zu jeder Directrix unendlich viele Systeme von Derivirten; sie sind nicht blofs durch den Grad ihrer Gleichung von einander verschieden, sondern für denselben Grad der Gleichung (1.) lassen sich ihre Constanten auf unendlichfache Weise so wählen, dafs man bei der Verwandelung von x', y' in x, y jedesmal zu derselben Directrix gelangt. Gehen wir von einer bestimmten Form der Gleichung (1.) aus, so zeichnet sich unter den verschiedenen Derivirten, welche demselben Pol und derselben Directrix angehören, eine durch ihren besondern Zusammenhang mit der Linie (1.) aus; wir meinen diejenige, deren Gleichung aus (1.) hervor-

geht, indem man x und y mit x' und y' verwechselt, also für welche

$$3. \quad F(x', y'; x, y) = 0$$

ist. Wir wollen jenen Zusammenhang dadurch hervorheben, dafs wir von den beiden Linien (1.) und (3.) jede eine *Gegenderivirte* des Poles $x'y'$ zu der andern nennen.

Ist in Bezug auf x, y die Gleichung (1.) vom $n$ten und (3.) vom $p$ten Grade, so mufs die Directrix ohne alle Ausnahme als eine Linie des $(n+p)$ten Grades angesehen werden, gesetzt auch, die höchsten Glieder nach x und y zerstörten sich, wenn man in (1.) x' und y' in x und y übergehen läfst*). Ist also die Directrix vom $m$ten Grade, so entspricht einer Derivirten der $n$ten Ordnung immer eine Gegenderivirte der $(m-n)$ten Ordnung.

Eine besondere Classe von Derivirten bilden die Polaren, wenn wir diesen Begriff in derjenigen Allgemeinheit auffassen, wie er in meinen „Uebertragungsprincipien etc." genommen ist, nämlich als die $n$te Polare eines Punctes in Bezug auf eine Directrix $U = 0$ diejenige Linie ansehen, deren Gleichung aus $U = 0$ erhalten wird, indem wir die letztere homogen machen, dann x, y, z um die Coordinaten des Poles wachsen lassen und das Wachsthum der $(m-n)$ten Ordnung von U gleich 0 setzen.

Setzen wir beispielsweise $m = 2$, $n = 1$, so ist die allgemeine Form der Gleichung einer Derivirten des Punctes x', y'.

$$4. \quad (ay'+bx'+c)y+(a_1y'+b_1x'+c_1)x+a_2y'+b_2x'+c_2 = 0,$$

zu welcher die Linie

$$5. \quad ay^2(a_1+b)xy+b_1x^2+(a_2+c)y+(b_2+c_1)x+c_2 = 0$$

als Directrix und

$$6. \quad (ay'+a_1x'+a_2)y+(by'+b_1x'+b_2)x+cy'+c_1x'+c_2 = 0$$

als Gegenderivirte gehört. Legen wir als Directrix eine bestimmte Linie des zweiten Grades

---

*) Macht man vor dem bezeichneten Uebergange die Gleichung (1.) homogen, indem man $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ statt x, y und demgemäfs auch $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ statt x', y' in dieselbe einführt, dann die Nenner wegschafft, so haben alle Glieder derselben in Bezug auf x, y, z die $n$te und in Bezug auf x', y', z' die $p$te Dimension, bleiben also, wie auch die einzelnen Coëfficienten derselben beschaffen sein mögen, beim Uebergange von x', y', z' zu x, y, z vom $(n+p)$ten Grade. Sinkt demnach die Gleichung (2.) in Bezug auf x und y unter den $(n+p)$ten Grad, so erscheint eine Potenz von z in allen übrigbleibenden Gliedern als gemeinsamer Factor und die Directrix zerfällt in eine bestimmte Curve und in eine einfache und vielfache gerade Linie, welche im Unendlichen liegt.

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

zu Grunde, so gelangen wir zu den Gleichungen (4.) und (6.), indem wir $a = A$, $a_1 + b = 2B$, $b_1 = C$, $a_2 + c = 2D$, $b_2 + c_1 = 2E$, $c_2 = F$ setzen. Jede Zerlegung der drei Coëfficienten $2B$, $2D$, $2E$ in je zwei Summanden führt also zu einem eigenen System von Derivirten und Gegenderivirten, welche sich alle auf dieselbe Directrix beziehen. In dem besondern Falle aber, dafs wir $a_1 = b = B$, $a_2 = c = D$, $b_2 = c_1 = E$ nehmen, fallen die beiden Gegenderivirten in eine einzige Linie

$$(Ay' + Bx' + D)y + (By' + Cx' + E)x + Dy' + Ex' + F = 0$$

zusammen, welche dann nichts Anderes ist als die Polare des Punctes $x'y'$ in Bezug auf dieselbe Directrix. Herr *Plücker* und Herr *Magnus* haben den gewöhnlichen Begriff der Polare dahin erweitert, dafs sie die Gleichung (1.) als den analytischen Ausdruck und die Definition derselben ansehen, ohne dieselbe im Allgemeinen auf eine Linie zweiten Grades als Directrix zu beziehen. Vielleicht werden die vorhergehenden Andeutungen schon hinreichen, besonders wenn man die Einführung höherer Polaren und Derivirten anerkennt, die hier aufgestellte Unterordnung der ersten Classe von Linien unter die zweite allgemeinere zu rechtfertigen. Es ist meine Absicht, in diesem Aufsatze einige Eigenschaften der Derivirten einer jeden Ordnung, welche sie mit den Polaren gemein haben, aufzusuchen und dieselben für die Derivirten in Bezug auf einen Kegelschnitt als Directrix weiter zu verfolgen.

Wir haben hier unter x und y gewöhnliche Punctcoordinaten verstanden und werden der Einfachheit und Kürze halber uns auch im Folgenden hierauf beschränken; doch lassen sich die Formeln, von welchen wir ausgehen werden, auch leicht für Liniencoordinaten, so wie für die in meinen „Uebertragungsprincipien" vorgeschlagenen und in Anwendung gebrachten Kreiscoordinaten ausdeuten.

§. 2.

Soll die Derivirte (1.) durch einen bestimmten Punct $\alpha\beta$ gehen, so erhält man zur Bestimmung ihres Poles die Gleichung

$$7.\quad F(\alpha, \beta;\ x, y) = 0,$$

welche vom $(m-n)$ten Grade ist; es sind also durch einen Punct unendlich viele Derivirte desselben Systemes möglich. Da aber (7.) in (3.) übergeht, wenn man in dieser leztern Gleichung $y' = \alpha$, $x' = \beta$ setzt, so erkennt man hierin sogleich folgende Sätze:

I. *Die Pole aller Derivirten desselben Systems, welche durch einen Punct gehen, liegen auf der Gegenderivirten dieses Punctes.*

II. *Die Gegenderivirten aller Puncte, welche auf einer Derivirten liegen, gehen durch einen Punct, den Pol dieser Derivirten.*

Soll die Linie (1.) durch zwei gegebene Puncte $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ gehen, so mufs ihr Pol auf den beiden Gegenderivirten dieser Puncte liegen, also einer ihrer $(m-n)^2$ Durchschnittspuncte sein, so wie auch umgekehrt alle Derivirten dieser Durchschnittspuncte sowohl durch $\alpha\beta$ als durch $\alpha'\beta'$ gehen müssen. Da nun zu jedem Puncte nur eine Derivirte gehört, so folgt:

III. *Durch zwei Puncte lassen sich im Allgemeinen $(m-n)^2$ Derivirte der nten Ordnung und desselben Systems legen.*

Für $n = m-1$ wird $(m-n)^2 = 1$; also ist eine Derivirte der $(m-1)$ten Ordnung in einem gegebenen Systeme durch zwei Puncte vollkommen bestimmt und ihr Pol liegt in dem Durchschnitt der beiden geraden Linien, welche jenen Puncten als Gegenderivirte angehören. Nun seien A und B zwei beliebige Puncte in der Ebene der Directrix; ihre $(m-1)$ten Derivirten schneiden sich in $(m-1)^2$ reellen oder imaginären Puncten, deren Gegenderivirten sowohl durch A als durch B gehen müssen. Da aber diese Gegenderivirten gerade Linien sind, so fallen sie alle in eine einzige Richtung zusammen. Man kann also nicht behaupten, dafs die $(m-n)^2$ Derivirten, welche in einem bestimmten Systeme $n$ter Ordnung durch zwei Puncte gelegt werden können, alle von einander verschieden seien, noch auch dafs jeder Derivirten nur ein Pol gehöre; vielmehr erhalten wir in Betreff der ersten und $(m-1)$ten Derivirten folgende allgemeine Sätze:

IV. *Jede gerade Linie kann in jedem System der ersten Ordnung zu einer Derivirten werden und hat in Bezug auf eine Directrix mten Grades $(m-1)^2$ verschiedene reelle oder imaginäre Pole.*

V. *Die $(m-1)$ten Derivirten aller Puncte einer geraden Linie schneiden sich in denselben $(m-1)^2$ Puncten, welchen jene gerade Linie als Gegenderivirte angehört.*

VI. *Alle $(m-1)$ten Derivirten desselben Systems, welche sich in einem Puncte schneiden, haben dieselben Durchschnittspuncte, die $(m-1)^2$ Pole derjenigen geraden Linie, welche jenem ersten Puncte als Gegenderivirte angehört *).*

*) Was hier von den Derivirten im Allgemeinen gesagt ist, gilt natürlich ebenso von den Polaren der verschiedenen Ordnungen. Den zuletzt aufgeführten Sätzen ist

§. 3.

Wir wollen die Functionen $F(x,y;\,x,y)$, $F(x,y;\,x',y')$, $F(x',y';\,x,y)$ im Folgenden, wo es angemessen ist, der Kürze halber durch F, F', F_1 bezeichnen.

Ist für beliebige Werthe von x', y'

$$F' \equiv \varphi' + k.\psi',$$

wo k eine willkürliche Constante, φ' und ψ' aber Functionen von x, y und x', y' sind, so folgt

$$F \equiv \varphi + k.\psi, \quad F_1 \equiv \varphi_1 + k.\psi_1,$$

worin folgender Satz enthalten ist:

VII. *Wenn die Derivirten desselben Poles in drei verschiedenen Systemen gleicher Ordnung dieselben Durchschnittspuncte haben, so schneiden sich auch die drei Directricen in denselben Puncten, und ein Gleiches gilt auch für die drei Gegenderivirten jenes Poles.*

Betrachten wir nach einander die drei Linien $F = 0$, $F' = 0$, $F_1 = 0$ als Directricen, so sind die drei ersten Polaren desselben Punctes $x'y'$ in Bezug auf sie:

$$(8.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)y + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)x + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)y + \left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)x + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)y + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) = 0, \end{cases}$$

wo die verschiedenen Differentialcoëfficienten nach den laufenden Coordinaten aus den Gleichungen der Directricen zu nehmen sind, nachdem man diese homogen gemacht hat, und durch die Einschliefsung derselben angedeutet werden soll, dafs nach der Differentiation in ihnen $x = x'$, $y = y'$, $z = z' = 1$ zu setzen ist. Statt aber in F die Veränderlichen x, y, z um ∂x, ∂y, ∂z wachsen zu lassen, können wir in F' sowohl x, y, z um ∂x, ∂y, ∂z als x', y', z' um $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ vermehren, wenn wir hierauf $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ setzen; daher ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \equiv \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F'}{\partial y'}\right), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \equiv \left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F'}{\partial x'}\right), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \equiv \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F'}{\partial z'}\right).$$

---

aber in meinen „Uebertragungsprincipien N. 167." eine zu grofse Ausdehnung gegeben und leider hat dieser Irrthum, den ich nicht erkannte, weil ich äufserer Umstände wegen das Manuscript zu frühe aus den Händen geben mufste, auch auf einige später entwickelte Resultate eingewirkt.

Auch hat man aufserdem offenbar

$$9.\quad \left(\frac{\partial F'}{\partial y'}\right) \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right),\quad \left(\frac{\partial F'}{\partial x'}\right) \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial F'}{\partial z'}\right) \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right).$$

Dadurch geht die erste der Gleichungen (8.) in

$$10.\quad \left\{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right\}y+\left\{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)\right\}x+\left\{\left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\right\}=0$$

über, wodurch folgender Satz erwiesen wird:

VIII. *Wenn man eine beliebige Directrix und zwei in Bezug auf dieselbe genommenen Gegenderivirten eines Poles als neue Directricen annimmt, so gehen die ersten Polaren jenes Poles in Bezug auf diese durch denselben Punct.*

Ist $m = 2n$, so hat die $n$te Derivirte eines Punctes mit seiner Gegenderivirten denselben Grad; ferner ist die erste Polare eines Punctes in Bezug auf eine beliebige Directrix auch seine erste Polare in Bezug auf seine $n$te Polare als Directrix (vergl. Uebertragungspr. N. 158.). Daher gehen die ersten Polaren desselben Poles, welche man erhält, wenn man jene beiden Gegenderivirten und die $n$te Polare in Bezug auf die Directrix $2n$ten Grades als neue Directricen annimmt, gemäfs dem vorigen Satze durch denselben Punct. Unter diesen Umständen findet aber der Satz VII. Anwendung, woraus folgt:

IX. *Wenn in Bezug auf eine gegebene Directrix zwei Gegenderivirten eines Punctes von derselben Ordnung sind, so haben sie mit seiner Polare dieser Ordnung einerlei Durchschnittspuncte.*

So entsteht die Gleichung der Polare des Punctes $x'y'$ in Bezug auf die Directrix (5.) nach §. 1., indem wir die Gleichungen (4.) und (6.), welche seinen beiden Gegenderivirten zugehören, addiren. Also geht wirklich die Polare durch den Durchschnittspunct der beiden Gegenderivirten. Bekanntlich erhalten wir die vierte Harmonicale zu diesen drei Linien, indem wir die Gleichungen (4.) und (6.) von einander subtrahiren; ihre Gleichung ist also

$$(a_1-b)(y'x-x'y)+(c-a_2)(y-y')+(c_1-b_2)(x-x')=0,$$

welche offenbar durch $x=x'$, $y=y'$ befriedigt wird, d. h.

X. *In Bezug auf eine Directrix zweiten Grades geht die Polare eines Punctes mit zwei Gegenderivirten desselben durch einen Punct, und die vierte Harmonicale zu diesen drei Linien geht durch ihren gemeinsamen Pol.*

Wegen der Uebereinstimmung der Gleichung (10.) mit der ersten unter den Gleichungen (8.) fallen die durch die letztern dargestellten Linien in eine einzige Gerade zusammen, sobald dieses für zwei unter ihnen der Fall ist. Da sie aber alle drei durch einen Punct gehen, so findet dieses für die beiden letztern statt, wenn der Pol $x'y'$ ein Punct der Linie

$$11. \quad \left[\frac{\partial F'}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]-\left[\frac{\partial F'}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\right]=0$$

ist, wobei wir durch die veränderte Form der Parenthesen andeuten, dafs in den Differentialcoëfficienten, wie sie in den Gleichungen (8.) erscheinen, die constanten Coordinaten des Poles durch x, y zu ersetzen sind. Für eine Directrix $m$ten Grades erhält die Gleichung (11.) den $2(m-1)$ten Grad; ihre Bildung wird durch Berücksichtigung der Relationen (9.) erleichtert, da aus diesen hervorgeht, dafs sie aus der blofsen Gleichung einer von beiden Derivirten abgeleitet werden kann. Ist die Directrix der Kegelschnitt (5.), so erhält (11.) auch den zweiten Grad und verwandelt sich nach gehöriger Reduction in

$$12. \quad a(a_1-b)y^2+(a_1^2-b^2)xy+b_1(a_1-b)x^2$$
$$+\{a(c_1-b_2)+a_1a_2-bc\}y+\{b_1(a_2-c)+a_1c_1-bb_2\}x+a_2c_1-b_2c=0.$$

Da aber die beiden Gegenderivirten eines jeden Punctes in Bezug auf (5.) selbst vom ersten Grade sind, so fallen die Polaren dieses Punctes in Bezug auf sie mit ihnen selbst zusammen *); *daher ist die Linie* (12.) *der geometrische Ort aller Puncte, deren beide Derivirten mit einander und mit ihrer Polare in Bezug auf dieselbe Directrix* (5.) *einerlei sind.* Die Linie (12.) ist aber, erstens, wie man sogleich erkennt, mit (5.) ähnlich und ähnlich liegend. Verlegt man, zweitens, den Anfangspunct der Coordinaten in das Centrum der Directrix, so ändern sich dadurch die Constanten der Gleichung (5.) dergestalt, dafs die Coëfficienten von y und x verschwinden; und da die Gleichung (12.) immer auf dieselbe Weise aus (5.) abgeleitet wird, so verschwindet als Folge davon auch das letzte Glied

*) Man mufs wohl beachten, dafs jede dieser Gegenderivirten eine absolute Linie ersten Grades und nicht aus einer Linie zweiten Grades degenerirt ist. Eine gerade Linie der letztern Art tritt in ihrem Zusammenhang mit andern Theilen einer Figur immer noch als eine Linie zweiten Grades auf, und zur Bestimmung der Polare eines Punctes in Bezug auf sie mufs man wieder unterscheiden, ob zwei gerade Linien in ihr zusammengefallen sind, oder ob die eine in's Unendliche übergetreten ist. Nur im letztern Falle gilt die *Poncelet*'sche Bestimmung, dafs die Polare eines Punctes in Bezug auf eine solche gerade Linie mit ihr parallel und von ihr eben so weit entfernt ist als der Pol. Vergl. Uebertragungspr. N. 157.

in ihr. Also geht die Linie (12.) jedesmal durch das Centrum der Directrix. Ferner ist sie von c_2 unabhängig, also unveränderlich für alle Directricen, welche mit einander ähnlich und ähnlichliegend sind und dasselbe Centrum haben.

Im Allgemeinen machen die beiden letzten der Linien (8.) mit der ersten verschiedene Winkel, deren Tangenten für rechtwinklige Coordinaten, welche wir der Einfachheit wegen hier voraussetzen wollen, die eine durch

$$\frac{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)},$$

die andere durch

$$\frac{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)}$$

ausgedrückt sind. Beide Werthe stimmen mit einander überein für solche Pole, welche auf der Linie

$$13.\quad \left[\frac{\partial F'}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial F'}{\partial x}\right]^2=\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\right]^2,$$

die, wie (11.), vom $2(m-1)$ten Grade ist, liegen. Für die Directrix (5.) kommen wir zu der Gleichung

$$14.\quad (a_1^2-b^2)y^2+2(a_1-b)(b_1-a)xy-(a_1^2-b^2)x^2$$
$$+2\{a(c-a_2)+a_1c_1-bb_2\}y+2\{b_1(c_1-b_2)+bc-a_1a_2\}x+c^2+c_1^2-a_2^2-b_2^2=0.$$

Auch diese Linie geht durch das Centrum der Directrix und ist unveränderlich für alle Directricen, welche mit einander ähnlich und ähnlichliegend sind und dasselbe Centrum haben. Ferner erkennt man aus der Zusammensetzung ihrer Gleichung, dafs sie eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten mit den Achsen der Directrix parallel sind. Da die Linien (8.) in diesem Falle, wie schon bemerkt, die Polare und die beiden Gegenderivirten des Punctes $x'y'$ sind, so ist (14.) der geometrische Ort aller Puncte, deren Polare den von den beiden Gegenderivirten gebildeten Winkel halbirt.

Es kann geschehen, dafs die eine oder die andere der Gleichungen (11.) und (13.) eine Identität wird, dafs also die durch sie ausgedrückte Eigenschaft allen Puncten des Coordinatenfeldes zukommt. Wir

wollen die Ermittelung der Bedingungen, unter welchen das Eine oder das Andere stattfindet, hier bei Seite lassen; für eine Directrix zweiten Grades kommt man auf beiden Wegen, wie auch vorauszusehen ist, zu dem Resultate, dafs die beiden Gegenderivirten eines Punctes mit seiner Polare identisch sein müssen, aber aufserdem für jede der betreffenden Gleichungen (12.) und (14.) noch zu bemerkenswerthen Besonderheiten, die man leicht entdecken wird.

§. 4.

Die Gleichungen $F=0$, $F'=0$ sind entweder beide zugleich für $x=x'$, $y=y'$ erfüllt, oder diese Werthe passen in keine von ihnen. Hierin sind folgende zwei Sätze enthalten:

XI. *Alle Derivirten eines Punctes der Directrix gehen durch diesen Punct.*

XII. *Wenn ein Pol auf seiner Derivirten liegt, so ist er zugleich auch ein Punct der Directrix.*

Ist die Directrix vom zweiten Grade und A ein Punct derselben, so wird die Derivirte von A eine gerade Linie, welche durch A geht, aber aufserdem die Directrix im Allgemeinen noch in einem Puncte B schneidet. Nun geht die Gegenderivirte von B erstens wieder durch B, weil B ein Punct der Directrix ist, und da ihr Pol auf der Derivirten von A liegt, nach II. auch durch A; sie ist also die Linie AB selbst.

XIII. *Wenn eine Secante an eine Directrix zweiten Grades die Derivirte eines ihrer Durchschnittspuncte mit der Directrix ist, so ist sie zugleich die Gegenderivirte des andern Durchschnittspunctes.*

Diejenigen Derivirten, welche ihren Pol auf der Directrix haben, sind also hierdurch auf eigenthümliche Weise characterisirt. Denken wir uns durch einen Punct P alle möglichen Derivirten eines gewissen Systems der $n$ten Ordnung gelegt, so haben diese nach I. ihre Pole auf der Gegenderivirten von P. Diejenigen unter diesen Polen, welche zugleich auf der Directrix liegen sollen, sind also unter der $m(m-n)$ Durchschnittspuncten der Directrix und der Gegenderivirten von P zu suchen; so wie auch umgekehrt die Derivirten aller jener Durchschnittspuncte nach II. durch P gehen müssen. Also lassen sich durch einen Punct an eine Directrix $m$ten Grades $m(m-n)$ Derivirten der $n$ten Ordnung und desselben Systems legen, deren Pole auf ihnen selbst liegen.

Nun seien PA, PA' die beiden Derivirten, welche man aus dem Puncte P an eine Directrix zweiten Grades legen kann, so dafs ihre Pole A, A' auf der Directrix liegen: dann ist AA' die Gegenderivirte von P. Schneidet aber PA die Directrix aufserdem in B und PA' in B', so sind diese beiden Graden nach XIII. auch die Gegenderivirten von B und B'; also wird BB' die Derivirte von P sein.

XIV. *Die vier Puncte, in welchen die Derivirte und die Gegenderivirte desselben Punctes in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades diese schneiden, liegen mit dem gemeinschaftlichen Pole zwei und zwei in gerader Linie; und diese beiden geraden Linien haben, nach einander als Derivirte und Gegenderivirte betrachtet, ihre Pole in ihren Durchschnittspuncten mit der Directrix.*

Da das Viereck $AA'BB'$ in die Directrix beschrieben ist, so werden die Seiten desselben und die Directrix von jeder Transversalen in solchen sechs Puncten geschnitten, welche eine Involution bilden. In dem Pole P fallen zwei dieser Durchschnittspuncte zusammen. Hieraus folgt:

XV. *Wenn man aus einem Puncte P eine beliebige Transversale an eine Directrix zweiten Grades legt, welche diese in den Puncten C, C' und die beiden Gegenderivirten von P in den Puncten D, D' schneidet, so steht P mit diesen vier Durchschnittspuncten in einer Involution von fünf Puncten, so dafs man hat:*

$$\frac{CD.CD'}{CP^2} = \frac{C'D.C'D'}{C'P^2}, \qquad \frac{DC.D'C}{DP^2} = \frac{D'C.D'C'}{D'P^2};$$

$$PC.PD.C'D' = PC'.PD'.CD, \qquad PC.PD'.DC' = PD.PC'.CD'.$$

Geht die Transversale durch den Punct O, in welchem sich die beiden Gegenderivirten von P schneiden, so fallen auch D und D' in einen Punct zusammen; die Linie CC' wird also von den beiden Puncten P und O harmonisch getheilt; was damit übereinstimmt, dafs die Polare von P durch den Punct O gehen mufs.

Die Polaren aller Ordnungen sind dadurch ausgezeichnet, dafs sie, wenn ihr Pol auf der Directrix liegt, diese zugleich berühren. (Uebertragungspr. N. 170.) Für eine andere Derivirte ist dieses dann der Fall, wenn die Coordinaten ihres Poles zugleich in die Gleichung (11.) passen. Denn erstens schneidet sich dann nach XI. die Derivirte mit ihrer Gegenderivirten auf der Directrix in demjenigen Puncte, der beiden als Pol angehört; zweitens fallen die drei ersten Polaren dieses Punctes in Bezug

auf jene drei Linien in eine Gerade zusammen, und da jede von ihnen ihre Directrix berühren mufs, so findet zwischen den beiden Gegenderivirten und der Directrix ebenfalls Berührung statt; d. h.

XVI. *Wenn zwei Gegenderivirte eines Punctes der Directrix einander berühren, so berühren sie auch die Directrix.*

Da für eine Directrix $m$ten Grades die Linie (11.) im Allgemeinen vom $2(m-1)$ten Grade ist, so folgt ferner:

XVII. *Auf einer Directrix* m*ten Grades existiren* $2(m-1)m$ *Puncte, deren zwei Gegenderivirte die Directrix berühren.*

Diese $2m(m-1)$ Puncte wechseln aber ihre Lage auf derselben Directrix mit dem System der Derivirten. Für die Directrix (5.) liegen sie in dem Durchschnitt derselben mit der Linie (12.); und da die Gleichungen dieser beiden Linien sich zu einer Gleichung ersten Grades verbinden lassen, so fallen zwei von ihren vier Durchschnittspuncten in's Unendliche und die beiden andern liegen auf der gemeinschaftlichen Sehne jener beiden Linien. Diese ist für alle Directricen, welche ähnlich und ähnlichliegend sind und dasselbe Centrum haben, unveränderlich. Legt man durch die beiden Puncte, in welchen sie eine Directrix schneidet, Tangenten an die letztere, so ist jede derselben zugleich Derivirte, Gegenderivirte und Polare des Berührungspunctes. Beide Tangenten müssen also durch den Pol der gemeinschaftlichen Sehne gehen, wenn man diese nach einander als Gegenderivirte, Derivirte und Polare betrachtet, so dafs die gemeinschaftliche Sehne in dieser dreifachen Eigenschaft denselben Pol hat. Da nun die Polare des Durchschnittspunctes der beiden Tangenten, der, auch wenn diese imaginär werden, reell bleibt, mit seinen beiden Derivirten zusammenfällt, so ist er selbst ein Punct der Linie (12.)

Die Verbindung der Gleichung (13.) mit (2.) führt ebenso zu folgender Bestimmung:

XVIII. *Auf einer Directrix* m*ten Grades existiren im Allgemeinen* $2m(m-1)$ *Puncte, deren zwei Gegenderivirten die Directrix unter gleichen Winkeln schneiden.*

§. 5.

Ist $\varphi(x,y)$ eine beliebige algebraische ganze Function von x und y, so wird bekanntlich der Ausdruck $\varphi(x', y')$ geometrisch dargestellt durch das Product der Segmente, welche auf einer durch den Punct $x'y'$ ge-

legten geraden Linie zwischen diesem Puncte und ihren einzelnen Durchschnittspuncten mit der Curve $\varphi(x, y) = 0$ enthalten sind, noch multiplicirt mit einem Factor, welcher constant bleibt für alle Puncte des Coordinatenfeldes, welche man an die Stelle von $x'y'$ treten lassen mag, so lange sich die Richtung der durch $x'y$ gelegten geraden Linie nicht ändert. Ist P der Punct $x'y'$ und l die Linie $\varphi(x, y) = 0$, so ist nach der in den Uebertragungsprincipien gewählten Bezeichnung jenes Segmentenproduct durch (Pl) dargestellt und heifst die Applicate des Punctes P nach l, wobei die Richtung der aus P an l gelegten Applicatenlinie als bekannt vorausgesetzt wird.

Hiernach hat der Ausdruck

$$F(x_1, y_1; x', y')$$

eine zweifache geometrische Interpretation; er ist erstens die Applicate des Punctes $x_1 y_1$ nach der Derivirten von $x'y'$, und zweitens die Applicate von $x'y'$ nach der Gegenderivirten von $x_1 y_1$, jede Applicate noch verbunden mit einem von der Richtung der Applicatenlinie abhängigen constanten Factor. Sind daher A und B zwei Puncte mit den Coordinaten $x'y'$ und $x''y''$, deren Derivirten wir kurz durch a und b bezeichnen: sind ferner C und D zwei andere Puncte mit den Coordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, welchen die Linien c und d als Gegenderivirte zugehören, so hat man

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1; x', y') &= \lambda(Ac) = \mu(Ca), \\ F(x_1, y_1; x'', y'') &= \lambda_1(Bc) = \mu_1(Cb), \\ F(x_2, y_2; x', y') &= \lambda_2(Ad) = \mu_2(Da), \\ F(x_2, y_2; x'', y'') &= \lambda_3(Bd) = \mu_3(Db); \end{aligned}$$

wo die verschiedenen λ und μ constante Gröfsen sind. Nehmen wir die nach derselben Curve gelegten Applicatenlinien parallel, so ist $\lambda = \lambda_1$, $\lambda_2 = \lambda_3$, $\mu = \mu_2$, $\mu_1 = \mu_3$, und es folgt aus den vorhergehenden Gleichungen die Relation

$$15. \quad \frac{(Ac)}{(Ad)} : \frac{(Bc)}{(Bd)} = \frac{(Ca)}{(Cb)} : \frac{(Da)}{(Db)},$$

welche hier eine umfassendere Bedeutung als bei den Polaren gewinnt. Die Bedingung, dafs die nach derselben Curve gelegten Applicatenlinien parallel sein sollen, wird jedesmal erfüllt, wenn man die nach c und d gelegten auf der Geraden AB, und die nach a und b gelegten auf CD annimmt, also, wenn A, B, C, D in gerader Linie liegen, alle vier auf dieser Geraden. Wir beschränken uns auf dieses eine Beispiel, um daran

nachzuweisen, wie solche metrische Relationen bei Derivirten einer höhern Ordnung zu behandeln sind. Ist die Directrix vom zweiten Grade, so werden die oben vorkommenden Applicaten zu einzelnen begrenzten geraden Linien, und wir gelangen dann durch (15.) zu den bekannten, in der Theorie der geradlinigen Polaren vorkommenden metrischen Beziehungen. Auf ihnen beruht zugleich die geometrische Construction der Derivirten von der Gattung (4.) zu jedem gegebenen Puncte, wenn vier Puncte, wovon nicht drei in gerader Linie liegen, und die zugehörigen Derivirten dieses Systems gegeben sind. (Vergl. *Magnus,* Aufg. und Lehrs. etc. I. §. 19.) Ist die Directrix gegeben, so ist das System (4.) vollkommen bestimmt, wenn man einen Punct mit der zugehörigen Derivirten kennt und entweder die Richtung der Derivirten eines zweiten Punctes, oder einen Punct, durch welchen sie gehen soll.

§. 6.

Rückt der Pol $x'y'$ in einer bestimmten Richtung $y+ax=0$ in's Unendliche, so bleiben in der Gleichung (1.) nur diejenigen Glieder bestehen, welche in Bezug auf x' und y' vom *n*ten Grade sind, und es mufs in ihr $\frac{y'}{x'}=-a$ gesetzt werden. Die Linie, welche durch die so modificirte Gleichung dargestellt wird, ist anzusehen als die *n*te Derivirte desjenigen Punctes, in welchem sich alle mit $y+ax=0$ parallele gerade Linien schneiden; wir nennen sie die dieser Richtung *conjugirten* Derivirten. Die Gegenderivirten aller Puncte einer solchen Linie gehen nach II. durch den Pol der letztern, verlieren sich also in derjenigen Richtung, welcher die Derivirte conjugirt ist, in's Unendliche.

Da alle Puncte des Unendlichen als derselben geraden Linie angehörig betrachtet werden müssen, so bilden sie in Bezug auf ein System von Derivirten der $(m-1)$ten Ordnung eine Gegenderivirte. Daraus folgt aber gemäfs VI. folgender Satz:

XIX. *Alle conjugirten Derivirten eines Systems $(m-1)$ter Ordnung schneiden sich in denselben Puncten.*

Wir kommen zu demselben Resultate auch direct durch folgende Betrachtung.

Die Gleichung einer Derivirten $(m-1)$ter Ordnung hat die Form

$$16.\quad y'.\varphi(x,y)+x'.\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)=0,$$

wo φ, φ_1, φ_2 drei beliebige Functionen $(m-1)$ten Grades sind: folglich

ist die der Richtung $y + ax = 0$ conjugirte Derivirte dieses Systems

$$17. \quad \alpha . \Phi(x, y) - \Phi_1(x, y) = 0.$$

Welche Werthe wir aber auch α beilegen mögen, um dadurch zu den verschiedenen conjugirten Derivirten des Systems (16.) überzugehen, so geht die Linie (17.) doch immer durch die $(m-1)^2$ Durchschnittspuncte der beiden Linien

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_1(x, y) = 0,$$

welche den beiden Richtungen $x = 0$ und $y = 0$ als conjugirte Derivirte entsprechen. Es sei ferner $x'' y''$ einer jener Durchschnittspuncte, so ist seine Gegenderivirte gemäfs (16.) offenbar

$$\Phi_2(x'', y'') = 0,$$

welche Gleichung, da sie die fortlaufenden Coordinaten gar nicht mehr enthält, eine im Unendlichen liegende Gerade darstellt.

Auf andere Derivirte als die $(m-1)$ter Ordnung kann der Satz XIX. nicht ausgedehnt werden; denn wenn auch die Puncte des Unendlichen eben sowohl einer vielfachen als einer einfachen geraden Linie angehören, also auf einem Orte beliebigen $n$ten Grades liegend angesehen werden können, so kann doch nicht jeder Ort $n$ten Grades zu einer Derivirten werden, wie dies für jede gerade Linie der Fall ist, sondern für einen höhern Werth von n als 1 bilden die Derivirten eine eigenthümliche Classe von Curven und können im Allgemeinen nicht in vielfache gerade Linien übergehen.

§. 7.

Für $m = 2$, $n = 1$ werden die conjugirten Derivirten diejenigen geraden Linien, welche Hr. *Magnus* in seiner Polarentheorie *Durchmesser* des Systems genannt hat. Nach §. 6. liegen die Pole aller geraden Linien, welche einander parallel sind, auf dem dieser Richtung conjugirten Durchmesser; ferner erhalten wir aus XIX. hier insbesondere:

XX. *Alle Durchmesser desselben Derivirten-Systems, in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades, gehen durch einen und denselben Punct, oder sie sind mit einander parallel.*

In der That ist die Analogie zwischen den conjugirten Durchmessern eines solchen Derivirten-Systems und denen eines Kegelschnittes gröfser, als es auf den ersten Blick scheinen möchte. Wir wollen sie etwas weiter verfolgen und nennen, wieder mit Hrn. *Magnus*, den Punct, in welchem

sich die Durchmesser eines Systems schneiden, den *Mittelpunct* desselben. Nehmen wir in der Gleichung

$$18.\quad y+\alpha x+\beta=0$$

α constant, β aber veränderlich an, so stellt sie ein System von parallelen geraden Linien dar, welchen in dem System (4.) der Durchmesser

$$19.\quad \alpha(ay+a_1x+a_2)-(by+b_1x+b_2)=0$$

und in dem System der Gegenderivirten (6.) der Durchmesser

$$20.\quad \alpha(ay+bx+c)-(a_1y+b_1x+c_1)=0$$

conjugirt ist. Endlich erhält man in dem Polaren-System, welches der Directrix (5.) entspricht, für den derselben Richtung conjugirten Durchmesser:

$$21.\quad \alpha\{(ay+a_1x+a_2)+(ay+bx+c)\}-\{(by+b_1x+b_2)+(a_1y+b_1x+c_1)\}=0.$$

Dieses ist zugleich ein Durchmesser der Directrix, so dafs sowohl der Mittelpunct, als auch die conjugirten Durchmesser der Directrix demjenigen besonderen Falle zugehören, wo die Derivirte (4.) mit der Gegenderivirten (6.) zusammenfällt und beide in die Polare übergehen. Dieser Zusammenhang bestätigt sich in allen späteren Consequenzen. Gemäfs seiner Gleichung geht der Durchmesser (21.) mit (19) und (20.) durch denselben Punct; was auch aus X. folgt, da diese drei Linien die beiden Gegenderivirten und die Polaren desselben im Unendlichen auf der Richtung (17.) liegenden Punctes sind. Zieht man ferner durch den Durchschnittspunct jener drei Linien eine vierte mit (17.) parallel, so sind diese vier Linien Harmonicalen, so dafs (21.) nicht blofs jede der Richtung (18.) parallele Chorde der Directrix, sondern auch das zwischen (19.) und (20.) enthaltene Stück derselben halbirt.

Unter den Parallelen, welche durch die Gleichung (17.) für ein veränderliches b ausgedrückt sind, kommen zwei vor, die, als Derivirte betrachtet, ihren Pol in einem ihrer Durchschnittspuncte mit der Directrix haben. Der Durchmesser (20.) ist aber die Gegenderivirte des im Unendlichen liegenden Punctes, in welchem die beiden Derivirten sich schneiden und geht also durch die beiden Pole der letztern. Beachten wir dabei, dafs dieselben Parallelen nach XIII. auch die Gegenderivirten der beiden andern Puncte sind, in welchen sie der Directrix begegnen, dafs also der Durchmesser (19.) auch durch diese beiden Puncte gehen mufs, so können wir dieses Resultat in folgendem Satze aussprechen:

XXI. *Wenn zwei parallele gerade Linien als Derivirte desselben Systems in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades ihre Pole auf der Directrix selbst haben, so geht der ihrer Richtung conjugirte Durchmesser dieses Systems durch die beiden andern Puncte, in welchen sie die Directrix schneiden.*

Dieser bemerkenswerthe Satz enthält eine Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaft eines jeden Kegelschnittes, wonach ein Durchmesser desselben die Berührungspuncte der seinem conjugirten Durchmesser parallelen Tangenten verbindet.

Setzt man die beiden Theile einer jeden der Gleichungen (19.), (20.), (21.) für sich gleich 0; mit andern Worten: nimmt man einmal $\alpha = 0$, dann $\alpha = \infty$, so bestimmen sich dadurch diejenigen Durchmesser eines jeden Systems, welche der Richtung der beiden Coordinaten-Achsen conjugirt sind, und in ihrem Durchschnitte das Centrum desselben Systems. Diese drei Centra werden im Allgemeinen von einander verschieden sein; aus der Form der bestimmenden Gleichungen aber folgt:

XXII. *Wenn die Mittelpuncte zweier Systeme von Gegenderivirten in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades zusammenfallen, so liegen beide auch im Centrum der Directrix.*

Ist

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \quad \text{oder} \quad a_1 b = a b_1,$$

so werden in dem System (19.) die beiden den Richtungen der Coordinaten-Achsen conjugirten Durchmesser mit einander parallel und der Mittelpunct des Systems liegt im Unendlichen. Eine Folge davon ist, dafs alle durch (19.) dargestellten Durchmesser dieselbe Richtung haben; wir können das System ein parabolisches nennen. Aus der Form der Gleichung (20.) folgt aber dann:

XXIII. *Wenn ein System von Derivirten in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades ein parabolisches ist, so hat das System der Gegenderivirten dieselbe Eigenschaft.*

Denken wir uns die drei Gleichungen (19.), (20.), (21.) auf die Form der Gleichung (18.) gebracht und dann die Coëfficienten von x in ihnen der Reihe nach durch α_1, α_2, α_3 bezeichnet, so ist:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 \alpha - b_1}{a \alpha - b}, \quad \alpha_2 = \frac{b \alpha - b_1}{a \alpha - a_1}, \quad \alpha_3 = \frac{(a_1 + b)\alpha - 2b_1}{2a\alpha - (a_1 + b)}.$$

Lassen wir die Gerade (18.) nach einander durch die Mittelpuncte der Systeme (19.), (20.), (21.) gehen, so wird sie selbst zum Durchmesser dieser Systeme. Durch Umwandlung der vorhergehenden Formeln erhalten wir also als Bedingung, damit zwei Durchmesser desselben Systems conjugirt seien, die Gleichungen

$$22. \quad \begin{cases} a\alpha\alpha_1-(b\,\alpha_1+a_1\alpha)+b_1 = 0, \\ a\alpha\alpha_2-(a_1\alpha_2+b\,\alpha)+b_1 = 0, \\ a\alpha\alpha_3-\tfrac{1}{2}(a_1+b)(\alpha+\alpha_3)+b_1 = 0, \end{cases}$$

wovon die letztere die bekannte Relation ist, durch welche die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser der Directrix (5.) von einander abhängig sind.

Für die Linien zweiten Grades können wir den Begriff einer Asymptote allgemein dahin definiren, dafs sie ein Durchmesser sei, welcher mit seinem conjugirten Durchmesser zusammenfällt. In dieser Auffassung läfst er sich unmittelbar auch auf Linien zweiten Grades in andern Coordinaten-Systemen als denen des Punctes übertragen, wie ich in den „Uebertragungspr." nachgewiesen habe, und besteht auch für die beiden Derivirten-Systeme (4.) und (6.) allgemein. Indem wir in den Gleichungen (22.) $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\alpha$, $\alpha_3=\alpha$ setzen, gehen alle drei in

$$a\alpha^2-(a_1+b)\alpha+b_1 = 0$$

über, d. h.

XXIV. *Jedes System von Derivirten in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades hat zwei Asymptoten, welche mit den Asymptoten der Directrix parallel sind.*

Ebenso hat jedes solche System von Derivirten, gleichwie die Directrix, zwei conjugirte Durchmesser, welche auf einander senkrecht stehen. In der Unterstellung, dafs die Coordinaten rechtwinklig seien, erhalten wir zur Bestimmung ihrer Richtung aus (22.) die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1\alpha^2+(a_1-b)\alpha-b &= 0, \\ b\,\alpha^2+(a_1-b)\alpha-a_1 &= 0, \\ (a_1+b)\alpha^2+2(a_1-b)\alpha-(a_1+b) &= 0. \end{aligned}$$

Wir müssen nach der hier durchgeführten Auffassungsweise die beiden auf einander senkrechten conjugirten Durchmesser eines Derivirten-Systems seine *Achsen* nennen, wobei wieder die Achsen der Directrix dem Polaren-System angehören.

§. 8.

Noch merkwürdiger scheint es uns, dafs sich auch die Brennpuncte in jedem System von Derivirten in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades wiederfinden, und dafs die Brennpuncte der Directrix selbst, gleichwie ihre Durchmesser und ihr Mittelpunct, sich nur auf den besondern Fall beziehen, wo die allgemeinen Derivirten in Polaren übergehen. Um in diese Untersuchung einzutreten, verweisen wir auf §. 4. zurück. Diejenige Rolle, welche in einem System von Polaren eine Tangente an die Directrix spielt, geht in allgemeinerer Auffassung auf jede Derivirte über, welche ihren Pol auf der Directrix hat. Bestimmen wir daher zuerst, welches die Form der Werthe von m und n sein mufs, wenn der Pol der Linie

$$23.\quad y+mx-n=0$$

in dem System (4.) auf (5.) liegen soll. Damit aber (23.) in (4.) übergehe, mufs der Pol $x'y'$ dieser Linie in die Gleichungen

$$m=\frac{a_1y'+b_1x'+c_1}{ay'+bx'+c},\qquad n=\frac{a_2y'+b_2x'+c_2}{ay'+bx'+c}$$

passen, aus denen man durch Elimination nach gehöriger Reduction

$$y'=\frac{(c_1b-cb_1)n+(b_2c-bc_2)m+b_1c_2-b_2c_1}{(ab_1-a_1b)n+(a_2b-ab_2)m+a_1b_2-a_2b_1},$$
$$x'=\frac{(a_1c-ac_1)n+(ac_2-a_2c)m+a_2c_1-a_1c_2}{(ab_1-a_1b)n+(a_2b-ab_2)m+a_1b_2-a_2b_1}$$

erhält. Wir wollen diese beiden Ausdrücke der Kürze halber durch

$$y'=\frac{\alpha n+\beta m+\gamma}{\alpha_2n+\beta_2m+\gamma_2},\qquad x'=\frac{\alpha_1n+\beta_1m+\gamma_1}{\alpha_2n+\beta_2m+\gamma_2}$$

darstellen. Damit also der Pol der Linie (23.) auf der Directrix liege, müssen die eben erhaltenen Werthe von y' und x', für y und x gesetzt, die Gleichung (5.) erfüllen. Die Ausführung einer solchen Substitution ist aber keineswegs so verwickelt, als es auf den ersten Blick scheinen mag. In meinen „Uebertragungspr." ist nachgewiesen, dafs sie selbst für Gleichungen eines beliebigen Grades auf einige wenige Differentiationen zurückgebracht werden kann und dafs sie für eine Gleichung zweiten Grades nur eine einzige Differentiation erfordert. Indem man dieses Verfahren auf (5.) anwendet, kommt man zu einer Gleichung zweiten Grades zwischen m und n, welche wir durch

$$24.\quad An^2+2Bmn+Cm^2+2Dn+2Em+F=0$$

darstellen, wo

$$A = a\alpha^2 + b_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2 + (a_1+b)\alpha\alpha_1 + (a_2+c)\alpha\alpha_2 + (b_2+c_1)\alpha_1\alpha_2,$$
$$C = a\beta^2 + b_1\beta_1^2 + c_2\beta_2^2 + (a_1+b)\beta\beta_1 + (a_2+c)\beta\beta_2 + (b_2+c_1)\beta_1\beta_2,$$
$$F = a\gamma^2 + b_1\gamma_1^2 + c_2\gamma_2^2 + (a_1+b)\gamma\gamma_1 + (a_2+c)\gamma\gamma_2 + (b_2+c_1)\gamma_1\gamma_2,$$
$$2B = \{2a\alpha + (a_1+b)\alpha_1 + (a_2+c)\alpha_2\}\beta + \{(a_1+b)\alpha + 2b_1\alpha_1 + (b_2+c_1)\alpha_2\}\beta_1 + \{(a_2+c)\alpha + (b_2+c_1)\alpha_1 + 2c_2\alpha_2\}\beta_2,$$
$$2D = \{2a\alpha + (a_1+b)\alpha_1 + (a_2+c)\alpha_2\}\gamma + \{(a_1+b)\alpha + 2b_1\alpha_1 + (b_2+c_1)\alpha_2\}\gamma_1 + \{(a_2+c)\alpha + (b_2+c_1)\alpha_1 + 2c_2\alpha_2\}\gamma_2,$$
$$2E = \{2a\beta + (a_1+b)\beta_1 + (a_2+c)\beta_2\}\gamma + \{(a_1+b)\beta + 2b_1\beta_1 + (b_2+c_1\beta_2\}\gamma_1 + \{(a_2+c)\beta + (b_2+c_1)\beta_1 + 2c_2\beta_2)\gamma_2$$

gesetzt ist. Betrachten wir m und n als Coordinaten einer geraden Linie, so sagt die Gleichung (24.), dafs die Derivirten des Systems (4.), welche ihre Pole auf der Directrix haben, eine Linie zweiter Classe umhüllen; sie haben also zu dieser dieselbe Beziehung wie die Polaren der verschiedenen Puncte der Directrix zu der letztern. Hiermit ist unsere Frage in der That vollständig entschieden; man wird die Brennpuncte des Kegelschnittes (24.) auch als Brennpuncte des Systems (4.) gelten lassen müssen, weil sie von den Derivirten, die ihren Pol auf der Directrix haben, ganz in derselben Abhängigkeit stehen, wie die Brennpuncte der Directrix zu ihren Tangenten. Wir wollen indessen tiefer auf diese Untersuchung eingehen, um die Natur der Brennpuncte eines Derivirten-Systems in ihrer ganzen Allgemeinheit zu erkennen, und wollen die Ausdrücke für ihre Coordinaten, wodurch dann als besonderer Fall auch die Brennpuncte der Directrix ermittelt werden, zu entwickeln suchen.

Ein Brennpunct eines Kegelschnittes ist analytisch dadurch characterisirt, dafs jede durch denselben gelegte gerade Linie mit imaginärer Richtung eine Tangente an den Kegelschnitt wird *). Indem wir uns also zu der oben angedeuteten Abstraction erheben, müssen wir den Begriff eines Brennpunctes in einem beliebigen Derivirten-System in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades dahin definiren, dafs jede durch denselben gelegte gerade Linie mit imaginärer Richtung ihren Pol auf der Directrix hat.

Lassen wir die Linie (23.) durch einen bestimmten Punct $x''y''$ gehen, so wird $n = -y'' - mx''$ und die Gleichung (24.) liefert zwei hierhergehörige Werthe von m. Die Curve (24.) scheidet das Coordinatenfeld in zwei Räume; jedem Puncte des einen Raumes, den man sich aufserhalb

*) Vergl. *Plücker*, Anal. Entw. II., 178 und System der anal. Geom. 128.

einer der Durchschnittspuncte der beiden Linien

$$26.\quad \begin{cases} Ay^2+A\cos 2\omega . x^2+2A\cos\omega . xy-2(B\cos\omega+D)y \\ \qquad -2(B\cos 2\omega+D\cos\omega)x+C\cos 2\omega+2E\cos\omega+F=0, \\ A\cos\omega . x^2+Axy-By-(2B\cos\omega+D)x+C\cos\omega+E=0 \end{cases}$$

sein mufs. Zur Auflösung dieser beiden Gleichungen mufs unterschieden werden, ob A gleich 0 ist, oder nicht.

Wenn A nicht verschwindet, so lassen sich die beiden Gleichungen (26.), indem wir in der letztern den weggelassenen Factor $\sin\omega$ restituiren und

$$y_1=\frac{Ay-D+(Ax-B)\cos\omega}{\sqrt{A}},\qquad x_1=\frac{(Ax-B)\sin\omega}{\sqrt{A}};$$

$$M=\{(B^2-AC)\cos 2\omega+D^2-AF+2(BD-AE)\cos\omega\}\frac{1}{A},$$

$$N=\{\tfrac{1}{2}(B^2-AC)\sin 2\omega+(BD-AE)\sin\omega\}\frac{1}{A}$$

setzen, auf die Form

$$y_1^2-x_1^2=M,\qquad x_1y_1=N$$

bringen und liefern demnach

$$y_1=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}(M\pm\sqrt{(M^2+4N^2)}))},\qquad x_1=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}(-M\pm\sqrt{(M^2+4N^2)}))},$$

wo aus den vorkommenden Doppelzeichen diejenigen Zeichen zusammenzunehmen sind, welche in y_1 und x_1 die nämliche Stellung einnehmen. Um endlich von y_1 und x_1 zu y und x zurückzukehren, hat man die Formeln

$$y=\frac{y_1}{\sqrt{A}}-\frac{x_1}{\sqrt{A}\,\mathrm{tang}\,\omega}+\frac{D}{A},\qquad x=\frac{x_1}{\sqrt{A}\sin\omega}+\frac{B}{A}.$$

Aus der Form der Werthe von y_1 und x_1 geht hervor, dafs immer zwei der erhaltenen Auflösungen reell und zwei imaginär sind.

Ist dagegen $A=0$, so stellt bekanntlich die Gleichung (24.) eine Parabel dar, und das Derivirten-System ist selbst ein parabolisches. Unter dieser Annahme sinken aber die Gleichungen (26.) auf den ersten Grad und liefern für y und x nur ein Paar endliche Werthe, nämlich

$$y=\frac{2B(F\cos\omega+E)+D(F-C)}{2(B^2+2BD\cos\omega+D^2)},\qquad x=\frac{2D(C\cos\omega+E)-B(F-C)}{2(B^2+2BD\cos\omega+D^2)};$$

die drei andern Auflösungen werden unendlich. Hierdurch kommen wir schliefslich zu folgendem Satze:

XXV. *Jedes System von Derivirten, in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades, hat vier Brennpuncte, wovon immer zwei reell und zwei imaginär sind. In einem parabolischen Systeme liegen die beiden imaginären und einer der reellen Brennpuncte im Unendlichen.*

verschwindet. Setzen wir den Zähler gleich 0, so kommen wir zu der Bedingung

$$\vartheta + \omega = 0, \quad \varrho = 1; \quad m = \cos\omega - \sqrt{-1}.\sin\omega.$$

Um hiernach z zu bestimmen, sei $2z = u + \upsilon\sqrt{-1}$; dann mufs also

$$e^{2z\sqrt{-1}} = e^{-\upsilon}(\cos u + \sqrt{-1}.\sin u) = 0$$

sein. Dies erfordert aber offenbar, da u und υ reelle Gröfsen sind, $e^{-\upsilon} = 0$, also $\upsilon = \infty$; wobei u ganz beliebig bleibt. Zu einem gleichbedeutenden Resultate führt uns die zweite Annahme, dafs der Nenner von $e^{2z\sqrt{-1}}$ gleich 0 werden soll, woraus nämlich folgt:

$$\vartheta - \omega = 0, \quad \varrho = 1; \quad m = \cos\omega + \sqrt{-1}.\sin\omega;$$
$$e^{-\upsilon}(\cos u + \sqrt{-1}.\sin u) = \infty.$$

Denn die letzte Gleichung erfordert, dafs $\upsilon = -\infty$ werde, wobei wieder u beliebig bleibt. Daher kann der Winkel, welchem

$$25. \quad m = \cos\omega \pm \sqrt{-1}.\sin\omega$$

entspricht, jeder beliebigen imaginären Gröfse gleich gesetzt werden, d. h. wenn der Punct $x''y''$ so gelegen ist, dafs die zugehörigen beiden Werthe von m durch (25.) gegeben sind, so ist jede durch denselben gelegte gerade Linie mit imaginärer Richtung eine Tangente an (24.) und hat als Derivirte des Systems (4.) ihren Pol auf (5.).

In dem besondern Fall, wenn ω ein rechter Winkel ist, wird nach (25.) $m = \pm\sqrt{-1}$. Also kann ein Winkel, dessen Tangente $\pm\sqrt{-1}$ ist, jeder beliebigen imaginären Gröfse gleich gesetzt werden.

Die Bedingung (25.) läfst sich geometrisch dahin interpretiren, dafs jedes Perpendikel, oder auch jede schräge Linie, welche man von einem *beliebigen* Puncte nach einer der Richtung m zugehörigen geraden Linie legt, unter der unendlichen Form erscheint, weil der Nenner $\sqrt{(m^2 + 1 - 2m\cos\omega)}$, welcher in den Ausdrücken für ein solches Perpendikel oder eine solche Schräge vorkommt, für den in (25.) enthaltenen Werth von m jedesmal verschwindet.

Nach dieser Digression kehren wir zu der Gleichung (24.) zurück, und setzen in ihr zur Bestimmung der Brennpuncte des Derivirten-Systems

$$m = \cos\omega \pm \sqrt{-1}.\sin\omega, \quad n = -(y'' + x''\cos\omega) \mp \sqrt{-1}.x''\sin\omega,$$

wo die obern Zeichen, wie auch die untern, zusammengehören; dann erhalten wir zur Bestimmung von $x''y''$ eine Gleichung zweiten Grades, welche aus einem reellen und einem imaginären Theile besteht. Setzen wir jeden dieser Theile für sich gleich 0, so erkennen wir, dafs $x''y''$

einer der Durchschnittspuncte der beiden Linien

$$26.\quad\begin{cases} Ay^2+A\cos 2\omega.x^2+2A\cos\omega.xy-2(B\cos\omega+D)y \\ \qquad -2(B\cos 2\omega+D\cos\omega)x+C\cos 2\omega+2E\cos\omega+F=0, \\ A\cos\omega.x^2+Axy-By-(2B\cos\omega+D)x+C\cos\omega+E=0 \end{cases}$$

sein mufs. Zur Auflösung dieser beiden Gleichungen mufs unterschieden werden, ob A gleich 0 ist, oder nicht.

Wenn A nicht verschwindet, so lassen sich die beiden Gleichungen (26.), indem wir in der letztern den weggelassenen Factor $\sin\omega$ restituiren und

$$y_1=\frac{Ay-D+(Ax-B)\cos\omega}{\sqrt{A}},\qquad x_1=\frac{(Ax-B)\sin\omega}{\sqrt{A}};$$

$$M=\{(B^2-AC)\cos 2\omega+D^2-AF+2(BD-AE)\cos\omega\}\frac{1}{A},$$

$$N=\{\tfrac{1}{2}(B^2-AC)\sin 2\omega+(BD-AE)\sin\omega\}\frac{1}{A}$$

setzen, auf die Form

$$y_1^2-x_1^2=M,\qquad x_1y_1=N$$

bringen und liefern demnach

$$y_1=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}(M\pm\sqrt{(M^2+4N^2)}))},\qquad x_1=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}(-M\pm\sqrt{(M^2+4N^2)}))},$$

wo aus den vorkommenden Doppelzeichen diejenigen Zeichen zusammenzunehmen sind, welche in y_1 und x_1 die nämliche Stellung einnehmen. Um endlich von y_1 und x_1 zu y und x zurückzukehren, hat man die Formeln

$$y=\frac{y_1}{\sqrt{A}}-\frac{x_1}{\sqrt{A}\operatorname{tang}\omega}+\frac{D}{A},\qquad x=\frac{x_1}{\sqrt{A}\sin\omega}+\frac{B}{A}.$$

Aus der Form der Werthe von y_1 und x_1 geht hervor, dafs immer zwei der erhaltenen Auflösungen reell und zwei imaginär sind.

Ist dagegen $A=0$, so stellt bekanntlich die Gleichung (24.) eine Parabel dar, und das Derivirten-System ist selbst ein parabolisches. Unter dieser Annahme sinken aber die Gleichungen (26.) auf den ersten Grad und liefern für y und x nur ein Paar endliche Werthe, nämlich

$$y=\frac{2B(F\cos\omega+E)+D(F-C)}{2(B^2+2BD\cos\omega+D^2)},\qquad x=\frac{2D(C\cos\omega+E)-B(F-C)}{2(B^2+2BD\cos\omega+D^2)};$$

die drei andern Auflösungen werden unendlich. Hierdurch kommen wir schliefslich zu folgendem Satze:

XXV. *Jedes System von Derivirten, in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades, hat vier Brennpuncte, wovon immer zwei reell und zwei imaginär sind. In einem parabolischen Systeme liegen die beiden imaginären und einer der reellen Brennpuncte im Unendlichen.*

Die Gleichungen (26.) vereinfachen sich sehr, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter, also $\cos\omega = 0$, $\sin\omega = 1$ ist, und kommen dann auf diejenigen zurück, nach welchen Hr. *Plücker* die Brennpuncte eines Kegelschnitts, welcher in Linien-Coordinaten in Bezug auf rechtwinkelige Achsen dargestellt ist, bestimmt hat.

Läfst man die Derivirten in die Polaren in Bezug auf die Directrix (5.) übergehen, also wenn die Gleichungen (26.) die Brennpuncte der Directrix selbst bestimmen, so ändern sich diese der Form nach nicht, aber die Coëfficienten der Gleichung (24.) bekommen eine auf diesen Fall passende einfachere Gestalt. Indem wir beispielsweise zur blofsen Verification von der Directrix

$$27.\quad a^2y^2 \pm b^2x^2 = a^2b^2$$

ausgehen, wird in (4.) für das Polaren-System

$$a_1 = b_1 = 0,\quad a_2 = c = 0,\quad b_2 = c = 0;$$

und

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \gamma = \mp a^2b^4;$$
$$\alpha_1 = 0,\quad \beta_1 = -a^4b^2,\quad \gamma_1 = 0;$$
$$\alpha_2 = \pm a^2b^2,\quad \beta_2 = 0,\quad \gamma_2 = 0;$$

also

$$A = -a^6b^6,\quad C = \pm a^8b^6,\quad F = a^6b^8,\quad B = 0;\quad D = 0,\quad E = 0.$$

Setzen wir nebstdem voraus, dafs (27.) auf ihre Achsen bezogen sei, so gehen die Gleichungen (26.) in

$$y^2 - x^2 \pm a^2 - b^2 = 0,\qquad xy = 0$$

über und führen unmittelbar zu der bekannten Bestimmung der Brennpuncte einer Ellipse oder Hyperbel, lehren auch, dafs die beiden reellen Brennpuncte einer solchen Linie auf ihrer grofsen, die imaginären auf der kleinen Achse liegen; welches Resultat sich leicht für jedes Derivirten-System generalisiren läfst.

Die bekannten Eigenschaften der Brennpuncte eines Kegelschnittes übertragen sich ohne Ausnahme mit den gehörigen Modificationen auf die Brennpuncte eines Derivirten-Systems. Nur über eine derselben erlaube ich mir eine Bemerkung. Bekanntlich liegen die Fufspuncte der Perpendikel, welche man von einem der Brennpuncte eines Kegelschnitts auf alle Tangenten desselben fällen kann, auf dem Umfange eines und desselben Kreises, und eben so die Fufspuncte der Perpendikel, die von einem der Brennpuncte eines Derivirten-Systems in Bezug auf eine Directrix zweiten Grades auf diejenigen Derivirten, deren Pole auf der Directrix selbst

liegen, gezogen werden können. Da aber durch den Brennpunct selbst unendlich viele gerade Linien gelegt werden können, welche den Kegelschnitt berühren, respective als Derivirte ihren Pol auf der Directrix haben, so mufs man schliefsen, dafs der Ort jener Fufspuncte, aufser dem Umfange einer Kreislinie, auch noch den Brennpunct selbst als isolirten Punct enthalte. Und wirklich gelangt man, wenn man den geometrischen Ort aller jener Fufspuncte direct aufsucht, zu einer Gleichung vierten Grades, welche in zwei andere zerfällt: in die Gleichung eines Kreises, und in die eines isolirten Punctes, des Brennpunctes selbst.

Wir schliefsen diesen Aufsatz mit zwei Bemerkungen, welche sich auf die Fortbildung der in ihm entwickelten Principien beziehen.

Will man die Resultate, zu welchen wir gelangt sind, auf andere Coordinaten-Systeme als die des Punctes übertragen, so mufs man überall unter xy dasjenige Element der Coordinaten-Bestimmung verstehen, welches dem jedesmaligen Systeme zu Grunde liegt, also eine gerade Linie oder einen Kreis, jenachdem wir uns in der Geometrie der geraden Linie oder des Kreises bewegen. Davon ist dann aber eine nothwendige Folge, dafs z. B. im System der Linien-Coordinaten als Pol eine gerade Linie angesehen werden mufs und dafs als Derivirte erster Ordnung überall derjenige Ort auftritt, welcher in diesem Systeme durch eine Gleichung ersten Grades dargestellt wird, also der Punct, so dafs Punct und gerade Linien in den Systemen der Punct- und Linien-Coordinaten ihre Rolle vollständig tauschen. Nur wenn man sich dieser analytischen Consequenz ohne Einschränkung überläfst, findet zwischen jenen beiden Systemen eine durchgreifende Reciprocität statt. So bedeuten dann die Gleichungen (18. bis 21.) in Linien-Coordinaten ebenfalls Puncte; man hat nicht mehr von conjugirten Durchmessern zu reden, sondern von conjugirten Puncten, und an die Stelle des Mittelpunctes in jedem System von Derivirten; so wie in der Directrix tritt eine feste gerade Linie, auf welcher je zwei conjugirte Puncte liegen. Zwar läfst sich aus einer Gleichung zweiten Grades in Linien-Coordinaten eben so leicht wie in Punct-Coordinaten die Lage des Centrums, der Achsen und des einer gegebenen Richtung conjugirten Durchmessers für den entsprechenden Kegelschnitt bestimmen; aber will man nicht blofs zu einem bereits bekannten geometrischen Factum den analytischen Ausdruck suchen, will man die Einführung verschiedener Coordinaten-Systeme als eben so vieler Uebertragungsprincipien

fruchtbar machen, so mufs man dieselben analytischen Formen nach der verschiedenen Bedeutung der veränderlichen und constanten Gröfsen in jedem besondern Systeme blofs interpretiren.

Gleichwie wir in dem System der gewöhnlichen Polaren die reciproke Figur zu einer gegebenen durch die Bewegung einer geraden Linie, welche in ihren auf einander folgenden Lagen den Puncten der letztern als Polare angehört, erzeugen, bestimmen auch die auf einander folgenden Derivirten, nicht blofs erster, sondern jeder beliebigen Ordnung zu den Puncten einer gegebenen Figur in ihrem Durchschnitte die entsprechenden Puncte einer neuen Figur, welche zu der ersten in der allgemeinsten Beziehung der Reciprocität steht. Diese Gattung der Verwandtschaft ist noch umfassender als die der Reciprocität bei den Polaren der verschiedenen Ordnungen; für eine gegebene Directrix erhält man zu jeder Figur unendlich viele reciproke. Die Aufsuchung der dabei geltenden Gesetze ist nicht ohne eigenthümliche Schwierigkeit.

Düsseldorf, den 25. Januar 1843.

2.

Die vom Hrn. Dr. Luchterhand am Schlusse des 23sten Bandes mitgetheilte Bedingung, unter welcher fünf Puncte in einer Kugelfläche liegen, aus einem barycentrischen Princip abgeleitet.

(Von Hrn. Prof. *A. F. Moebius* in Leipzig.)

Herr Dr. *Luchterhand* entwickelt a. a. O. die Relation, welche zwischen den rechtwinkligen Coordinaten von fünf in einer Kugelfläche liegenden Puncten Statt findet, und gelangt durch geometrische Deutung dieser Relation zu dem merkwürdigen Satze, dafs, *wenn man von den fünf Pyramiden, welche durch je vier der fünf Puncte bestimmt werden, den Inhalt einer jeden mit dem Quadrate der Entfernung des jedesmal übrig bleibenden fünften Punctes von einem beliebigen sechsten multiplicirt, die Summe von dreien dieser Producte gleich der Summe der beiden andern ist.*

In einer Anmerkung wird der entsprechende Satz für die Ebene hinzugefügt.

Am einfachsten dürften diese Sätze durch Hülfe nachstehender barycentrischer Betrachtungen zu beweisen sein, bei denen sie als specielle Fälle von allgemeineren Sätzen, und letztere hinwiederum als besondere Anwendungen eines barycentrischen Princips erscheinen, das noch für manche andere geometrische Untersuchungen von Nutzen sein kann.

1. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem sei (X, Y, Z) der Schwerpunct der in den Puncten (x, y, z), (x', y', z') etc. befindlichen Gewichte m, m' etc., unter denen hier, wo blofs Raumgröfsen in Betracht kommen, beliebige Zahlen, die zum Theil auch negativ sein können, zu verstehen sind. Es ist dann bekanntlich

$$X = \frac{mx+m'x'+\dots}{m+m'+\dots} \quad \text{oder} \quad m(X-x)+m'(X-x')+\dots = 0,$$

folglich

$$(a.)\quad mx^2+m'x'^2+\dots = m(X+(x-X))^2+m'(X+(x'-X))^2+\dots$$
$$= (m+m'+\dots)X^2+m(x-X)^2+m'(x'-X)^2+\dots,$$

und ebenso

(*b*.) $my^2+m'y'^2+\ldots = (m+m'+\ldots)Y^2+m(y-Y)^2+m'(y'-Y)^2+\ldots,$
(*c*.) $mz^2+m'z'^2+\ldots = (m+m'+\ldots)Z^2+m(z-Z)^2+m'(z'-Z)^2+\ldots.$
Die Addition von (*a*.), (*b*.) und (*c*.) giebt, wenn noch der Anfangspunct des Coordinatensystems mit O, die Puncte (x, y, z), (x', y', z') etc. mit $A, A', \ldots$ und ihre Schwerpunct (X, Y, Z) mit S bezeichnet werden:
(*d*.) $m.OA^2+m'.OA'^2+\ldots = (m+m'+\ldots)OS^2+m.SA^2+m'.SA'^2+\ldots$

Ist demnach von den Puncten $A, A', \ldots$, denen resp. die Gewichte $m, m', \ldots$ zukommen, S der Schwerpunct, so ist, wo auch der Punct O angenommen werden mag, das Aggregat

$$m.OA^2+m'.OA'^2+\ldots-(m+m'+\ldots)OS^2$$

stets von derselben Gröfse. Sein aus (*d*.) fliefsender Werth $m.SA^2+m'.SA'^2+\ldots$ ergiebt sich, wenn man O mit S zusammenfallen läfst.

2. Um diese Relationen etwas einfacher darzustellen, werde zu dem System der mit den Gewichten $m, m', \ldots$ belasteten Puncte $A, A', \ldots$ der Schwerpunct S selbst mit einem Gewichte hinzugefügt, welches der negativ genommenen Summe der Gewichte von $A, A', \ldots$ gleich sei. Man erhält somit ein System, bei welchem die Summe der Gewichte null ist, und welches gar keinen Schwerpunct hat, allein eben deshalb die Eigenschaft besitzt, dafs jeder seiner Puncte der Schwerpunct des jedesmal übrigen ist; z. B. A der Schwerpunct von $A', \ldots$ und S mit den resp. Gewichten $m', \ldots$ und $(m+m'+\ldots)$. Baryc. Calcul. §. 10.

Dafs das System der Puncte $A, B, C, \ldots$, deren Gewichte $a, b, c, \ldots$ seien, keinen Schwerpunct hat, werde ausgedrückt durch

$$aA+bB+cC+\ldots = 0,$$

wobei immer auch $a+b+c+\ldots = 0$ sein mufs (ebendas. §. 15. 4.). Die geometrische Bedeutung hiervon ist, dafs wenn durch $A, B, C, \ldots$ nach einer beliebigen Richtung gelegte Parallelen von irgend einer mit dieser Richtung nicht parallelen Ebene in $A', B', C', \ldots$ geschnitten werden,

$$a.AA'+b.BB'+c.CC'+\ldots = 0$$

ist (§. 13.) oder, was auf dasselbe hinauskommt, dafs, wo auch der Punct Z angenommen werden mag, das Vieleck, dessen Seiten parallel mit $ZA, ZB, ZC, \ldots$ und resp. $= a.ZA, b.ZB, c.ZC, \ldots$ sind, ein in sich zurücklaufendes oder geschlossenes ist.

In Verbindung hiervon mit dem in 1. vom Schwerpuncte bewiesenen Satze schliefsen wir nun:

Ist $aA+bB+cC+\ldots=0$, so ist für jeden Ort des Punctes O die Summe $a.OA^2+b.OB^2+c.OC^2+\ldots$ von derselben Gröfse; oder, was dasselbe aussagt: es ist für eine beliebige Annahme der Puncte O und P,

$$a(OA^2-PA^2)+b(OB^2-PB^2)+c(OC^2-PC^2)+\ldots = 0.$$

3. **Anwendungen.** Mit gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen bei Bezeichnung einer geraden Linie, eines Dreieckes oder einer dreiseitigen Pyramide durch Nebeneinanderstellung der zwei, drei oder vier an die End- oder Eckpuncte gesetzten Buchstaben (B. C. §§. 1., 18. und 19.) ist, wenn drei Puncte A, B, C in einer Geraden liegen: $aA+bB+cC=0$, wobei sich $a:b:c=BC:CA:AB$ verhalten (§. 22. c.), oder kurz: es ist

$$BC.A+CA.B+AB.C=0.$$

Ebenso hat man bei vier in einer Ebene enthaltenen Puncten A, B, C, D (§. 24. c.):

$$BCD.A-CDA.B+DAB.C-ABC.D=0,$$

und bei fünf Puncten $A, \ldots E$ im Raume (§. 26. c.):

$$BCDE.A+CDEA.B+DEAB.C+EABC.D+ABCD.E=0.$$

Wo daher auch die Puncte O und P angenommen werden mögen, so ist, wenn A, B und C in einer Geraden liegen:

$$[1.]\quad BC(OA^2-PA^2)+CA(OB^2-PB^2)+AB(OC^2-PC^2)=0.$$

wenn A, B, C und D in einer Ebene liegen:

$$[2.]\quad BCD(OA^2-PA^2)-CDA(OB^2-PB^2)$$
$$+DAB(OC^2-PC^2)-ABC(OD^2-PD^2)=0,$$

und wenn $A, \ldots E$ fünf Puncte im Raume überhaupt sind:

$$[3.]\quad BCDE(OA^2-PA^2)+CDEA(OB^2-PB^2)$$
$$+DEAB(OC^2-PC^2)+EABC(OD^2-PD^2)+ABCD(OE^2-PE^2)=0.$$

4. **Weitere Folgerungen.** *a.* Man lasse in [1.] den Punct P mit A zusammenfallen, so kommt

$$BC.OA^2+CA.OB^2+AB.OC^2 = CA.AB^2+AB.CA^2$$
$$= CA.AB(CA+AB) = CA.AB.CB,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$AB.OC^2+BC.OA^2 = AC.OB^2+AB.BC.AC.$$

Diese Formel, in welcher, wenn B zwischen A und C liegend angenommen wird, alle Glieder positiv sind, drückt die bekannte Relation bei einem Dreieck ACO aus, in welchem man noch die Spitze O mit einem Puncte B der Basis AC verbunden hat.

b. Nimmt man in [2.] an, dafs die vier Puncte $A, .. D$ in einem Kreise liegen, und läfst P den Mittelpunct dieses Kreises sein, so wird $PA^2 = PB^2 = PC^2 = PD^2$, und da immer

$$BCD - CDA + DAB - ABC = 0$$

ist (B. C. §. 18. *c.*), so reducirt sich [2.] auf

$$BCD.OA^2 - CDA.OB^2 + DAB.OC^2 - ABC.OD^2 = 0,$$

worin, wenn A, B, C, D die Ordnung ist, in welcher die vier Puncte im Kreise auf einander folgen, sämmtliche vier Dreiecke BCD, CDA etc. einerlei Zeichen haben. Dabei kann, wie man noch bemerke, der Punct O auch aufserhalb der Ebene des Kreises liegen. Es ist dies die *Luchterhand*sche Relation für den Kreis.

c. Sind A, B, C, D, E fünf Puncte in der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunct P ist, so ist $PA^2 = PB^2 =$ etc. Deshalb, und da immer $BCDE + CDEA + ... + ABCD = 0$ ist (§. 20. *d.*), zieht sich unter der gemachten Annahme die Formel [3.] zusammen in:

$$BCDE.OA^2 + CDEA.OB^2 + DEAB.OC^2 + EABC.OD^2 + ABCD.OE^2 = 0.$$

Nimmt man dabei an, was immer möglich ist, dafs die Puncte A und E auf entgegengesetzten Seiten der Ebene BCD liegen, so haben, wie leicht aus §. 19. und mit Hülfe einer Zeichnung erhellet, von den fünf Pyramiden $BCDE, \ldots ABCD$ der Formel die erste und die letzte einerlei Zeichen, und das entgegengesetzte die drei übrigen. Dies ist der *Luchterhand*sche Satz für die Kugel.

d. Um noch eine Folgerung hinzuzufügen, wollen wir setzen, dafs in [2.] die vier Puncte A, B, C, D in einer Ellipse liegen, von welcher O und P die beiden Brennpuncte seien. Alsdann ist $OA + PA = OB + PB$ $=$ etc. gleich der grofsen Axe der Ellipse, welche $2a$ heifse. Hierdurch wird

$$OA^2 - PA^2 = 2a(OA - PA) = 2a(2OA - 2a);$$

ebenso $OB^2 - PB^2 = 2a(2OB - 2a)$ etc. und die Gleichung [2.] verwandelt sich damit in

$$BCD(OA - a) - CDA(OB - a) + ... = 0,$$

oder da $BCD - CDA + ... = 0$ ist:

$$(K.) \quad OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0.$$

Durch ganz ähnliche Schlüsse wird man zu derselben Gleichung auch unter der Voraussetzung geführt, dafs A, B, C, D in einer Hyperbel

liegen, welche O und P zu Brennpuncten hat. Da ferner ein Kegelschnitt durch vier in ihm liegende Puncte und den einen seiner beiden Brennpuncte vollkommen bestimmt ist, so schliefsen wir: *dafs die Gleichung* (K.) *die nothwendige und hinreichende Bedingung darstellt, unter welcher vier Puncte A, B, C, D einer Ebene in einem Kegelschnitte liegen, von welchem O der eine Brennpunct ist.*

Zusätze. *a.* Zerlegt man die Dreiecke BCD, CDA, ... in solche, welche insgesammt O zur Spitze haben, und wonach

$$BCD = OBC + OCD + ODB, \quad CDA = OCD + ODA + OAC \text{ etc.}$$

ist, so geht die Gleichung (K.) über in

$$(OD - OA)OBC + (OB - OA)OCD + (OB - OC)ODA$$
$$+ (OD - OC)OAB + (OC - OA)ODB + (OD - OB)OCA = 0.$$

Hieraus fliefst unmittelbar die Gleichung zwischen den Polarcoordinaten von vier Puncten eines Kegelschnittes, wenn dessen einer Brennpunct zum Pol genommen wird (oder die Gleichung zwischen den Radien Vect. und den Längen von vier Oertern eines Planeten). Setzt man nämlich $OA = r$, $OB = r'$, $OC = r''$, $OD = r'''$, und die Winkel, welche diese vier Linien nach einerlei Seite hin mit einer in der Ebene des Kegelschnittes gezogenen Grundlinie machen, $= l, l', l'', l'''$, so werden die Dreiecke $OBC = \frac{1}{2} r' r'' \sin(l'' - l')$, $OCD = \frac{1}{2} r'' r''' \sin(l''' - l'')$ etc., und damit die vorige Gleichung

$$(r''' - r) r' r'' \sin(l'' - l') + (r' - r) r'' r''' \sin(l''' - l'') + (r' - r'') r''' r \sin(l - l''')$$
$$+ (r''' - r'') r r' \sin(l' - l) + (r'' - r) r''' r' \sin(l' - l''') + (r''' - r') r'' r \sin(l - l'') = 0.$$

Auch mufs sich dieselbe Gleichung als Resultat der Elimination aus den vier Gleichungen

$$p = r(1 + e\cos(l - \omega)), \quad p = r''(1 + e\cos(l'' - \omega)),$$
$$p = r'(1 + e\cos(l' - \omega)), \quad p = r'''(1 + e\cos(l''' - \omega))$$

ergeben, welche der Reihe nach ausdrücken, dafs die vier Puncte (r, l), (r', l'), (r'', l'') und (r''', l''') in einem Kegelschnitte liegen, dessen halber Parameter $= p$, dessen Excentricität $= e$, dessen Hauptaxe mit der Grundlinie einen Winkel $= \omega$ macht, und von welchem der eine Brennpunct der Anfangspunct der Coordinaten ist.

b. Setzt man bei [2.], wie vorhin, dafs $OA \pm PA = OB \pm PB =$ etc. $= 2a$, nimmt aber nicht zugleich an, dafs O und P mit A, B, C und D in einer Ebene liegen, so sind $A, .. D$ vier Puncte einer Fläche, die durch Umdrehung eines Kegelschnittes, dessen Brennpuncte O und P sind, um

seine Haupt-Axe entsteht. *Die Gleichung* $(K.)$ *gilt folglich auch dann, wenn* A, B, C, D *in dem Durchschnitte einer Ebene mit einer solchen Revolutionsfläche liegen, welche* O *zu dem einen ihrer Brennpuncte hat.*

c. Da die Gleichung $(K.)$ auch dann noch bestehen mufs, wenn blofs O, nicht auch P, in der Ebene $ABCD$ liegt, und da in diesem Falle nach dem Satze in $(d.)$ $A, .. D$ in einem Kegelschnitte liegen, welcher O zum Brennpuncte hat, so schliefsen wir noch:

Der Schnitt einer Fläche, welche durch Umdrehung eines Kegelschnittes um seine Haupt-Axe entsteht, mit einer durch den einen Brennpunct des Kegelschnittes beliebig gelegten Ebene, ist ein Kegelschnitt, welcher denselben Brennpunct zu dem seinigen hat.

d. Behandelt man die Gleichung [3.] ähnlicherweise wie [2.], so findet sich

$$OA.BCDE + OB.CDEA + OC.DEAB + OD.EABC + OE.ABCD = 0$$

als die Bedingungsgleichung dafür, dafs fünf Puncte $A, \ldots E$ *in einer durch Umdrehung eines Kegelschnittes um seine Haupt-Axe entstehenden Fläche liegen, von welcher* O *der eine Brennpunct ist.*

Indem man jede der fünf Pyramiden $BCDE$ etc. in vier andere zerlegt, deren jede O zur Spitze hat, und wonach z. B.

$$BCDE = OCDE - ODEB + OEBC - OBCD$$

ist (§. 20. zu Ende) verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$\Sigma(OA - OB)\,OCDE + \Sigma(OA - OD)\,OEBC = 0,$$

wo jeder der beiden summatorischen Ausdrücke eine Summe von fünf Gliedern darstellt, deren jedes aus dem nächst vorhergehenden, das zweite aus dem hingeschriebenen ersten, erhalten wird, wenn man A, B, C, D, E resp. in B, C, D, E, A verwandelt.

3.

Beiträge zur Chronologie.

(Von Hrn. Dr. *G. H. F. Nesselmann* in Königsberg.)

Erster Beitrag.

Es sind keine neue Theorieen, die ich hier mittheile, sondern nur Erleichterungen und Vereinfachungen der practischen Anwendung schon bekannter, indem ich drei Aufgaben, die Bestimmung des Wochentages irgend eines christlichen Datums, die Berechnung des Osterfestes nach dem Julianischen und Gregorianischen Kalender, und die gegenseitige Reduction des Mohammedanischen und des christlichen Datums auf einander mittels einiger Tabellen, in Vergleich mit den bisher gebräuchlichen Methoden, practisch bedeutend vereinfacht zu haben glaube.

Da es bei den beiden erstgenannten Aufgaben immerfort darauf ankommt, die Reste zu finden, die eine gegebene Jahrzahl läfst, wenn man sie durch 19 und durch 28 dividirt, diese Zahlen aber für die Division nicht eben bequem sind, so nehme ich zunächst die Aufsuchung dieser beiden Reste als zwei Hülfsaufgaben voraus.

Erste Hülfs-Aufgabe.

Den Rest der Division durch 19 zu finden.

Da 400 durch 19 dividirt den Rest 1 läfst, so wird, wenn man von einer gegebenen Zahl M 400 subtrahirt und den Ueberschufs durch 19 dividirt, dieser Rest um 1 kleiner sein, als wenn man M durch 19 dividirt hätte; subtrahirt man aber 800 von M, so wird der Rest des Ueberschusses um 2 kleiner sein; und so weiter fort. Im allgemeinen wird, wenn man M durch 19 dividirt den Rest m, $M-400n$ den Rest p läfst, $p=m-n$, also $m=p+n$ sein. Wenn man also von einer gegebenen Zahl M das möglich-gröfste Vielfache von 400, es sei das $n$fache, subtrahirt und den Ueberschufs durch 19 dividirt, so erhält man, wenn man zu dem Reste dieser Division den Factor n addirt, den gesuchten Rest der Zahl M. Nun ist $399=21.19$; wenn man also die 21 ersten Vielfachen von 19 ein für allemal hinschreibt, so hat man nur von der gegebenen Zahl das möglich-

gröfste Vielfache von 400 von dem Ueberschufs das möglich-gröfste Vielfache von 19 zu subtrahiren, und zu diesem letztern Ueberschusse den Factor des subtrahirten Vielfachen von 400 zu addiren; die Summe ist der Rest der gegebenen Zahl. Nun enthält Taf. I. *a.* die Vielfachen von 400 und neben jedem noch den Factor *n*; Taf. I. *b.* enthält die ersten 21 Vielfachen von 19, so dafs man mit Hülfe dieser Tafel den Rest irgend einer Jahrzahl durch 19 ohne Division im Kopfe finden kann. Z. B. um den Rest zu finden, den 1839 durch 19 dividirt läfst, nehmen wir 1839 — 1600 = 239, 239 — 228 = 11, 11 + 4 = 15; demnach ist 15 der gesuchte Rest. Wird auf diese Weise der Rest gleich oder gröfser als 19, so nimmt man 19 davon, z. B. 1846 — 1600 = 246, 246 — 228 = 18, 18 + 4 = 22, also ist der Rest 3.

Zweite Hülfs-Aufgabe.

Den Rest der Division durch 28 zu finden.

Da 700 durch 28 aufgeht, so läfst, wenn man von irgend einer Zahl das möglich-gröfste Vielfache von 700 subtrahirt, der Ueberschufs, durch 28 dividirt, denselben Rest, den die gegebene Zahl läfst. Nun ist 700 = 25.28. Wenn man also, wie es in Taf. II. geschehen ist, die ersten 24 Vielfachen von 28 hinschreibt, so kann man auch diesen Rest ohne Division im Kopfe finden. Z. B. 1839 — 1400 = 439, 439 — 420 = 19, und das ist der gesuchte Rest.

Der Kürze wegen werde ich im Folgenden den Rest von 19 den *Rest I.*, den Rest von 28 den *Rest II.* nennen. Beide Reste substituire ich in den folgenden Rechnungen respective für die *goldene Zahl* und für die *Stelle des Sonnencirkels.* Man erhält die goldene Zahl, wenn man den Rest I. um 1, den Sonnencirkel, wenn man den Rest II. um 9 vermehrt.

Wochentag eines christlichen Datums.

Da der *Julianische Kalender* eine vierjährige Periode bildet, so giebt diese, combinirt mit den sieben Wochentagen, eine Periode von 28 Jahren, nach welchem Zeitraume dieselben Jahrestage in constanter Reihenfolge wieder auf dieselben Wochentage fallen. Aber auch schon innerhalb der 28jährigen Periode fällt der Jahres-Anfang von je vier Jahren auf denselben Wochentag. Wenn man also den Jahres-Anfang von irgend welchen 28 auf einander folgenden Jahren kennt, so wird jedes Jahr,

welches mit einem dieser gegebenen den *Rest II.* gemein hat, mit demselben auch in den Wochentagen übereinstimmen. Hat man aber den Wochentag des ersten Januar, so findet man den Wochentag irgend eines Datums desselben Jahres, wenn man die Anzahl der vom 1. Januar bis zu dem gegebenen Datum verflossenen Tage durch 7 dividirt und den Rest zu dem Wochentage des ersten Januar addirt. Behufs dieser Rechnungen habe ich die beiden Tafeln III. und IV. gegeben. Taf. III. enthält oben in fünf Zeilen vertheilt die *Reste II.* von 0 bis 27 nach der Reihe, nur dafs nach je vieren ein Feld leer geblieben ist; die beiden darunter stehenden Zeilen enthalten für jeden *Rest II.* eines Jahres A den Wochentag des 31. December des Jahres $A-1$, in Zahlen ausgedrückt, so dafs 1 Sonntag, 2 Montag u. s. w. bedeutet. Die Taf. IV. zeigt in der Rubrik *b.* die bei dem Beginne eines jeden Monats bereits abgelaufenen Tage, in der Rubrik *a.*, die wir vorläufig allein brauchen, die Reste der unter *b.* stehenden Zahlen durch 7. Nach dem Gesagten wird in der folgenden Regel nichts mehr unklar sein.

Man suche den Rest II. oben in Taf. III. und notire die in einer der beiden untern Zeilen stehende Zahl, jenachdem das gegebene Datum vor oder nach Chr. Geburt fällt. Zu dieser Zahl addire man die in Taf. IV. a. bei dem Monatsnamen stehende Zahl, und den Monatstag des gegebenen Datums: die Summe dieser drei Zahlen dividire man durch 7, so ist der Rest der gesuchte Wochentag.

Z. B.: An welchem Wochentage ward Cäsar ermordet am 15. März 44 v. Chr.?

Das Jahr 44 hat den Rest II. = 16. Dazu finden wir

aus Taf. III.	7
März aus Taf. IV. *a.*	3
der 15. März	15
Summe . . .	25.

Der Rest durch 7 ist 4, also war der Tag ein Mittwoch.

Auf welchen Wochentag fiel der 5. October 1582, das Datum der Gregorianischen Kalenderreform?

Rest II. = 14; dazu aus Taf. III.	1
October aus Taf. IV. *a.* . .	0
der 5. October	5
Summe . . .	6,

also war es ein Freitag.

Für den Gebrauch der Taf. IV. ist nur zu beachten, dafs vor Chr. diejenigen Jahre Schaltjahre sind, welche durch 4 dividirt den Rest 1 lassen.

Will man aber den Wochentag eines *Gregorianischen* Datums finden, so reducirt man dieses auf das Julianische Datum, indem man von ersterem die in der vorletzten Zeile der Taf. V. bei dem gehörigen Zeitraum stehende Zahl subtrahirt. In Bezug auf den Rest von 7 ist es aber gleichgültig, ob man die Zahl der vorletzten Reihe subtrahirt, oder die Zahl der letzten Reihe, die Ergänzung jener zu 14, addirt. Demnach hat man zu den drei bei der vorigen Regel angegebenen Zahlen noch diese Zahl der letzten Reihe aus Taf. V. zu addiren.

Z. B.: 17. August 1786. Rest II. = 22; dazu finden wir

aus Taf. III.	4
August aus Tab. IV. *a.* . .	2
17. August	17
Zahl aus Taf. V.	3
Summe . . .	26.

Der Rest durch 7 ist 5: demnach fiel der Todestag Friedrich des II. auf Donnerstag.

Diese Methode, den Wochentag eines christlichen Datums zu bestimmen, ist so ungemein einfach, dafs sie kaum etwas zu wünschen übrig läfst. Namentlich macht sie den Gebrauch der *Sonntagsbuchstaben* vollkommen überflüssig. Man findet übrigens die Sonntagsbuchstaben, die den respectiven *Resten II.* angehören, wenn man die ersten sieben Buchstaben in umgekehrter Ordnung an die Zahlen in Taf. III. schreibt, so dafs *A* an 7, *B* an 6 u. s. w. zu stehen kommt.

Julianisches Osterfest.

Das Osterfest im Julianischen Kalender hängt nach den Bestimmungen des Nicäischen Conciliums nur von der *goldnen Zahl* und dem *Sonnencirkel* ab, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von dem *Rest I.* und dem *Rest II.* Demnach wird immer, so oft je zwei Reste I. und II. zusammentreffen, Ostern auf dasselbe Datum fallen, das heifst, das Julianische Osterfest ist in einem Zeitraum von 19.28 = 532 Jahren periodisch. Aber innerhalb 28 Jahren giebt es allemal je 4, in denen der 1. März, auf den es hier allein ankommt, auf denselben Wochentag fällt. Demnach wird auch, wenn ein *Rest I.* mit jedem der vier *Reste II.*, welche den 1. März

auf denselben Wochentag setzen, zusammentrifft, Ostern auf dasselbe Datum fallen. Dadurch hat sich die Taf. VI. ähnlich wie Taf. III. abkürzen lassen, und die einfache Regel ist nun folgende:

Man suche den Rest I. links, den Rest II. oben in Taf. VI., so zeigt die Tafel unmittelbar das Julianische Osterdatum.

Der Bequemlichkeit und einiger unten folgenden Rechnungen wegen habe ich das Osterdatum immer vom 1. März gezählt, so dafs man, wenn die Tabelle das Datum gröfser als 31 zeigt, 31 davon zu subtrahiren hat, um das Datum des April zu erhalten.

Um den Tag im Gregorianischen Kalender zu finden, der dem gefundenen Julianischen Osterdatum entspricht, hat man zu letzterem die dem gegebenen Zeitraum angehörige Zahl aus der vorletzten Reihe der Taf. V. zu addiren. Das Jahr 1843 hat den *Rest I.* = 0, den *Rest II.* = 23: dafür giebt die Taf. VI. den 42. März = 11. April Jul. Styls, oder den 23. April Gregor. Styls.

Gregorianisches Osterfest.

Gregor führte statt der goldenen Zahl die von ihr abhängige *Epakte* ein, und zwar nach folgender Regel: Man multiplicire die goldene Zahl mit 11 und dividire das Product durch 30. so ist der Rest die *Julianische Epakte*. Wenn man von dieser in dem Zeitraum

von 1583 bis 1699 die Zahl 10,
- 1700 - 1899 - - 11,
- 1900 - 2199 - - 12
u. s. w.

subtrahirt, wobei man dieselbe nöthigenfalls um 30 vermehrt, so ist der Ueberschufs die *Gregorianische Epakte*. Zu jeder Gregorianischen Epakte nun giebt eine besondere Tabelle das Datum an, auf welches der Ostervollmond fällt. Wenn man diese Zwischenrechnungen ein für allemal ausführt und wieder für die goldene Zahl den *Rest I.* substituirt, so ist klar, dafs man für jeden zweihundertjährigen Zeitraum unmittelbar zu jedem *Rest I.* das ihm entsprechende Datum des Ostervollmonds angeben kann. Z. B. das Jahr 1840 hatte den Rest I. 16, also die goldene Zahl 17, daher die Julianische Epakte 7, die Gregorianische Epakte 26, und zu dieser zeigt die Tabelle als Ostervollmondsdatum den 17. April. Wenn dagegen ein Jahr aus dem Zeitraum von 1583 bis 1699 den Rest I — 16 hat, so

wird sein Vollmondsdatum auf den 16. April, und in einem Jahre aus dem Zeitraum von 1900 bis 2199 dasselbe auf den 18. April fallen. Demnach habe ich in der Taf. VII. für jeden dieser Zeiträume unmittelbar an den Rest I. das von ihm abhängige Datum des Ostervollmonds geschrieben, in derselben Weise, wie bei Taf. VI., nämlich vom 1. März fortlaufend gezählt. So hat man also aus Taf. VII. unmittelbar und ohne Rechnung für jedes Jahr den Ostervollmond. Nun könnte man nach der obigen Methode für dieses Vollmondsdatum den Wochentag aufsuchen, um den nächsten Sonntag, das Osterdatum zu finden. Dies wäre aber weitläufig, und darum habe ich unten an Taf. VI. noch eine mit einem Sternchen bezeichnete Reihe angefügt, welche die Rechnung für diesen speciellen Fall sehr abkürzt. Diese unterste Reihe in Taf. VI. enthält nämlich für jeden darüber stehenden Rest II. die Anzahl von Tagen, welche zum 21. März zu addiren sind, damit man auf den nächsten Sonntag gelange, aber im Julianischen Kalender. Wenn nun die Taf. VII. das Vollmondsdatum, statt im Gregorianischen Kalender, auch im Julianischen gäbe, so würde zu jedem solchen Vollmondsdatum, welches durch 7 dividirt aufgeht, dieselbe Anzahl von Tagen zu addiren sein, wogegen jeder um 1 successive wachsende Rest jenes Datum dem nächsten Sonntage um 1 Tag näher bringt. Wenn also beide Tafeln, VI. und VII., für denselben Kalender berechnet wären, so würde man das Osterdatum erhalten, wenn man das Vollmondsdatum aus Taf. VII. durch 7 dividirte, den Rest von der durch den *Rest II.* unten in Taf. VI. gegebenen Zahl subtrahirte und diesen Ueberschufs zu dem Vollmondsdatum addirte. Nun ist aber noch der Unterschied der Kalender in Rechnung zu bringen. Da z. B. in gegenwärtigem Jahrhundert dieser Unterschied 12 Tage beträgt, so dafs dem 21. März Jul. Styls der 33. März Gregor. Styls entspricht, oder, da es sich hier blofs um den Wochentag handelt, und man von dem 33. März 14 subtrahiren kann, der 21. März Jul. Styls mit dem 19. März Gregor. Styls auf einen Wochentag, unser 21. März daher um zwei Wochentage später fällt, als der Julianische, so ist von der Zahl in Taf VI., aufser dem Reste des Vollmondsdatums, gegenwärtig noch 2, im Allgemeinen, die Zahl der letzten Reihe aus Taf. V. zu subtrahiren. Demnach gestaltet sich die vollständige Regel jetzt so:

Man suche den Rest I. links in Taf. VII. und notire die unter dem betreffenden Zeitraum stehende Zahl, welche das Ostervollmondsdatum ist. Zu dieser Zahl addire man die demselben Zeitraum angehörige Zahl der

unterstem Reihe aus Taf. V., dividire die Summe durch 7, und subtrahire den Rest von der unter dem dem gegebenen Jahre angehörenden Rest II. stehenden Zahl der letzten Reihe in Taf. VI., wobei diese nöthigenfalls um 7 vermehrt wird. Den Ueberschufs dieser Subtraction addire man zu dem oben notirten Vollmondsdatum, so zeigt die Summe das Gregorianische Osterdatum.

Beispiel: Gegenwärtiges Jahr 1843 hat den *Rest I.* 0, der *Rest II.* 23. Der *Rest I.* giebt aus Taf. VII. das Vollmondsdatum 44; dazu aus Taf. V. 2 addirt, giebt durch 7 dividirt den Rest 4; dieser von 7, welche Zahl in Taf. VI. unter dem *Rest II.* 23 steht, subtrahirt, giebt den Ueberschufs 3, welcher zu dem Vollmondsdatum 44 addirt das Osterdatum 47: d. h den 16. April giebt.

Auch diese Methode ist sehr einfach und bequem, weil man die ganze Rechnung im Kopfe machen kann, und ein Versehen oder ein Rechnungsfehler nicht gut möglich ist.

Erhält man nach dieser Methode das Osterdatum 57, d. h. den 26. April, so ist dafür der früheste Termin, nämlich der 22. März zu nehmen. Der Fall hat sich aber bis jetzt erst einmal ereignet, nämlich im Jahre 1609, und wird sich erst 2076 wiederholen. Im Jahre 1609 haben wir nämlich Rest I. = 13, Rest II. = 13, daher das Vollmondsdatum 50, dazu 4 giebt durch 7 den Rest 5; nun haben wir aus Taf. VI. bei dem Rest 13 auch die Zahl 5, d. h. der Vollmond fiel selbst auf Sonntag, und wir haben 7 hinzu zu addiren, also 57. Ebenso ist es im Jahre 2076: Rest I. = 6, Rest II. = 4; Vollmondsdatum 50; dazu 1 aus Taf. V. giebt den Rest 2; Rest II. = 4 giebt in Taf. VI. ebenfalls 2, also Osterdatum 57.

Ich brauche nicht zu erwähnen, dafs auch aufser diesem seltnen Falle Ostern auf den 22. März fallen kann. Z. B. für das Jahr 1818 haben wir Rest I. = 13, Rest II. = 26; Vollmond 21; dazu 2, giebt den Rest 2; subtrahirt von 3, giebt 1, welches zu 21 addirt den 22. März giebt.

Es folgen hier noch als Anhang zur christlichen Osterrechnung einige einfache Regeln über die Art der Abhängigkeit des Wochentages der unbeweglichen und des Datums der beweglichen Tage und Feste vom Osterfeste, wobei ich noch einmal erinnere, dafs ich unter dem Osterdatum immer die aus der Tabelle unmittelbar gefundene, noch nicht auf den April reducirte Zahl verstehe.

Wenn man zu dem Osterdatum im Gemeinjahr 1, im Schaltjahr 2 addirt und die Summe von dem nächst gröſsern Vielfachen von 7 subtrahirt, so zeigt der Rest den Wochentag an, auf welchen Neujahr fällt.

Aehnlich kann man den Wochentag jedes Datums im Jahre von dem Osterdatum abhängig machen; wobei es nur darauf ankommt, die Zahl zu bestimmen, welche man zum Osterdatum addirt, bevor man dieses von dem Vielfachen von 7 subtrahirt. Diese Zahl findet man aber, *wenn man zu dem gegebenen Monatstage die in Taf. IV. a. unter der Rubrik Gemeinjahr stehende Zahl addirt, von der Summe 2* (im Schaltjahr in den Monaten Januar und Februar 1) *subtrahirt und den Rest von dem nächst gröſsern Vielfachen von 7 subtrahirt.* Z. B. wollen wir eine Regel für das Johannisfest, 24. Juni, geben, so addiren wir aus Taf. IV. *a.* 4 zu 24 und subtrahiren davon 2, das ist 26; dann subtrahiren wir 26 von 28, so erhalten wir 2, und die Regel heiſst nun: Man addire zum Osterdatum 2 und subtrahire die Summe von dem nächst gröſsern Vielfachen von 7, so ist der Rest der Wochentag, auf welchen Johannis fällt. — Oder auch: *Man subtrahire die um 2 verminderte Summe des Monatstages und der Zahl aus Taf. IV. a. von dem Osterdatum, indem man dieses nöthigenfalls um 7 oder um 14 vermehrt, und den Ueberschuſs subtrahire man von dem nächst gröſsern Vielfachen von 7, so ist der Rest der Wochentag des gesuchten Datums.*

Man subtrahire vom Osterdatum im Gemeinjahr 11, im Schaltjahr 10, so ist der Ueberschuſs das Datum des Januar, auf welches der letzte *Sonntag nach Epiphaniä* fällt. Diesen Ueberschuſs dividire man durch 7, so ist der Quotient die Anzahl der Sonntage nach Epiphaniä, der um 7 vermehrte Rest das Datum des Januar, auf welches der erste fällt.

Man addire zum Osterdatum 2, so ist die Summe das Datum des Mai, auf welches der erste *Sonntag nach Trinitatis* fällt. Man addire zum Osterdatum 1, und dividire die Summe durch 7, so ist der Rest, zu 20 addirt, das Datum des November, auf welches der letzte fällt; der Quotient, von 30 subtrahirt, die Anzahl derselben.

In diesem Jahre ist das Osterdatum 47; davon 11 subtrahirt, giebt den 36. Jan. = 5. Febr. als Datum des letzten Epiphaniä-Sonntages. 36 durch 7 dividirt giebt den Quotienten 5 als Anzahl dieser Sonntage, und den Rest 1, der um 7 vermehrt anzeigt, daſs der erste derselben auf den 8. Januar fiel.

Ferner $47+2=49$ sagt, dafs der erste Trinitatis-Sonntag auf den 18. Juni fällt. $47+1$ dividirt durch 7, giebt den Rest 6, der zu 20 addirt den 26. November als Datum des letzten, und den Quotienten 6, der von 30 subtrahirt anzeigt, dafs die Anzahl der Trinitatis-Sonntage dieses Jahres 24 ist.

Man addire zum Osterdatum 3 und dividire die Summe durch 7. Der Rest zeigt das Datum des October, der Quotient aber, von 23 subtrahirt, den Trinitatis-Sonntag, auf welchen das *Erntefest* fällt. Z. B. $47+3=50$, Rest 1, Quotient 7: daher fällt in diesem Jahre das Erntefest auf den 1. October und auf den 16. Sonntag nach Trinitatis. Der Rest 0 bedeutet hier den 30. September.

Nennen wir das Osterdatum O, so fällt auf den $(O-7)$ten April Bufstag, auf den $(O-22)$ten Mai Himmelfahrt, auf den $(O-12)$ten Mai Pfingsten; auf den $(O-19)$ten Februar Fastnacht (im Schaltjahr aber, wenn $O<47$ ist, auf den $(O-18)$ten Februar). $O+12$, im Schaltjahr $O+13$, ist die Anzahl der Tage von Neujahr bis Fastnacht inclusive.

Addirt man zum Osterdatum im Gemeinjahr 3, im Schaltjahr 4, und dividirt die Summe durch 7, so zeigt der Rest das Datum des *Sonntags nach Neujahr;* ist aber dieser Rest 0, 1 oder 6, so findet, kirchlich ausgedrückt, kein Sonntag nach Neujahr Statt.

Man dividire das Osterdatum durch 7, und addire den Rest zu 26, so ist die Summe das Datum des *Sonntags nach Weihnachten.* Ist der Rest 0 oder 6, so findet dieser Sonntag nicht Statt, weil im ersten Falle der 26ste December, d. h. der zweite Weihnachtstag, im zweiten Falle der 32ste December, d. h. der 1. Januar herauskommt.

Mohammedanischer Kalender.

Die Mohammedaner haben ein Mondenjahr, und zwar ein Gemeinjahr zu 354 und ein Schaltjahr zu 355 Tagen. Ihr Kalender beruht auf einer dreifsigjährigen Periode, so dafs 2. 5. 7. 10. 13. 15. 18. 21. 24. 26. 29. Schaltjahre sind, nach Einigen jedoch das 16te statt des 15ten. Ihre Aera begann am 15. Juli 622 n. Chr., nicht am 16. Juli, wie so oft fälschlich angeführt wird, z. B. noch von *Francoeur* in seiner Abhandlung *„Sur le calendrier des Mahométans. (Extrait des Additions à la connaissance des Temps pour 1840.)* *Alfergani* und *Ulugh-Beg* versichern ausdrück-

lich, die Mohammedanische Aera habe an einem Donnerstage begonnen, und beide bauen ihre Regeln consequent auf diese Voraussetzung. Nun war aber nicht der 16te, sondern der 15. Juli 622 ein Donnerstag *). Das Jahr wird in 12 Monate von abwechselnd 30 und 29 Tagen getheilt, deren Namen diese sind:

Moharrem	von	30	Tagen.	Regeb	von	30	Tagen.
Safer	-	29	-	Schabân	-	29	-
Rebia I.	-	30	-	Ramadhân	-	30	-
Rebia II.	-	29	-	Schewâl	-	29	-
Gemâdi I.	-	30	-	Dsilkade	-	30	-
Gemâdi II.	-	29	-	Dsilhige	-	29	-

Im Schaltjahre erhält der letzte Monat 30 Tage, so dafs, vernünftigerweise, der Schalttag an das Ende des Jahres tritt, wie im ursprünglichen Julianischen Kalender, dessen Jahr mit dem ersten März begann.

Die dreifsigjährige Periode enthält 10631 Tage, welche Zahl durch 7 dividirt den Rest 5 läfst. Aus diesem Umstande werden sich die folgenden Regeln, den

Wochentag eines Mohammedanischen Datums

zu bestimmen, leicht einsehen lassen, ohne dafs sie einer detaillirten Erklärung bedürften, wenn ich nur vorher gesagt habe, dafs Taf. VIII. für den Mohamm. Kalender der Taf. IV. für den christlichen, Taf. X. dagegen der Taf. III. entspricht.

Man dividire die Jahrzahl durch 210 und den Rest dieser Division durch 30. Den Quotienten dieser zweiten Division suche man links in Taf. IX., den Rest oben in Taf. X. und schreibe die neben jenem und unter diesem stehenden Zahlen eine unter die andere; unter eben dieselben schreibe man das gegebene Monatsdatum, und endlich die in Taf. VIII. a. neben dem Monatsnamen stehende Zahl, addire diese vier Zahlen und dividire die Summe durch 7, so zeigt der Rest den gesuchten Wochentag.

Z. B.: Auf welchen Wochentag fiel 18. Ramadhân 994? Rest von 210 ist 154; dies durch 30 dividirt giebt den Quotienten 5 und den Rest 4.

---

*) Hiermit wird natürlich nicht die Möglichkeit geleugnet, dafs das historische Factum der Flucht Mohammeds am 16. Juli Statt gefunden haben könne.

Quotient 5 aus Taf. IX. giebt . . .	4
Rest 4 aus Taf. X.	3
Ramadhân aus Taf. VIII.	5
18. Ramadhân	18
Summe . . .	30.

Der Rest durch 7 ist 2, also der Wochentag Montag.

In der *Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes* Bd. 3. S. 347 heifst es: „Alexandrien ward an einem *Freitage*, dem ersten Tage des Monats Muharrem im Jahre 20 der Flucht, erobert." Wir wollen diese Data prüfen.

Quotient 0 aus Taf. IX. . . .	0
Rest 20 aus Taf. X.	3
Moharrem aus Taf. VIII. . .	0
1 Moharrem	1
Summe . . .	4.

Demnach fiel der 1. Moh. 20 nicht auf *Freitag*, sondern auf *Mittwoch*, wonach jene Angabe zu berichtigen ist.

Die Anordnung der Reste in Taf. X. ist empirisch gewonnen. Die Taf. IX., welche den Ueberschufs der dreifsigjährigen Perioden über eine volle Wochenzahl in Anschlag bringt, erklärt sich leicht daraus, dafs, da eine Periode die Form $7n+5$ hat, die doppelte die Form $7n+10$ oder, quod idem, $7n+3$ u. s. w haben wird.

Um noch an einem Beispiel aus *Ulugh-Beg* zu zeigen, dafs er wirklich vom 15. Juli 622 ausgeht, nehme ich Folgendes aus seinem Werke über die Epochen (Cap. VI. Sect. 1. pag. 40, 50. Ed. *Gravius*.). „Dienstag, am 8. Schewâl des Jahres 847;" 847 durch 210 dividirt läfst den Rest 7; demnach haben wir

aus Taf. X. . . .	2
aus Taf. VIII. . .	0
8. Schewâl . . .	8
	10.

Rest durch 7 = 3, also Dienstag. Das angeführte Datum entspricht, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, dem 28. Januar 1444 unserer Zeitrechnung. Nun giebt

Rest II. = 16 aus Taf. III. . . .	3
28. Januar	28
	31.

Rest von 7 = 3, d. i. Dienstag. Es steht also aufser allem Zweifel, dafs *Ulugh-Beg* die Mohamm. Aera als am 15. Juli begonnen betrachtet. (Vergl. dessen Werk Cap. 1. pag. 9, 10 oben.)

Reduction des Mohammedanischen Datums auf das christliche, und umgekehrt.

So einfach der Mohammedanische Kalender in sich selbst ist, so schwierig ist seine Vergleichung mit dem Julianischen, weil in beiden weder die Jahreslänge noch die Periode, noch die Reihenfolge der Schaltjahre übereinstimmt. Der einzige sichere Weg, auf dem eine genaue Vergleichung möglich wird, besteht darin, dafs man das in einem Kalender gegebene Datum auf Tage, und diese Anzahl von Tagen dann in dem andern Kalender auf Jahre und Monate reducirt. Die Tafeln IV. *b.* VIII. *b.* XI. und XII. dienen dazu, diese Reductionen zu vereinfachen. Die beiden erstgenannten enthalten, die eine für den Julianischen, die andere für den Mohammedanischen Kalender, die bei dem Beginne jedes Monats bereits abgelaufenen Tage des Jahres. Wenn man zu der entsprechenden Zahl einer dieser Tafeln ein gegebenes Monatsdatum addirt, so hat man dieses Datum als Jahrestag, d. h. vom 1. Jan. oder 1. Moh. an gezählt. Die Taf. XI. *a.* enthält in ähnlicher Weise die am Anfange jedes Jahres der dreifsigjährigen Mohammedanischen Periode bereits abgelaufenen Tage; wobei die Schaltjahre schon in Rechnung gebracht und bei den folgenden Operationen nicht weiter zu berücksichtigen sind. Taf. XI. *b.* enthält die am Schlusse jeder 30jährigen Periode abgelaufenen Tage. In derselben Weise giebt Taf XII. unter *a.* die am Anfange jedes Jahres der vierjährigen Julianischen Periode, unter *b.* die am Ende jeder vierjährigen Periode bis 100, von da an die am Ende jedes Jahrhunderts abgelaufenen Tage.

Hat man nun ein gegebenes Datum im Mohammedanischen Kalender, so verwandelt man dasselbe auf folgende Weise in Tage:

Man subtrahirt von der gegebenen Jahrzahl die zunächst kleinere Periodenzahl aus Taf. XI. b. und notirt die daneben stehende Anzahl von Tagen. Den Ueberschufs der Jahre sucht man in Taf. XI. a. und schreibt die Anzahl von Tagen unter jene. Dann addirt man zu der in Taf. VIII. b. neben dem Monatsnamen stehenden Zahl das gegebene Monatsdatum, und setzt auch diese Summe unter die beiden schon notirten Zahlen. Die

Summe der drei Zahlen giebt die vom 1. Moh. des Jahres 1 (15. Jul. 622) *bis zu dem gegebenen Datum verflossenen Tage.*

Z. B.: Es sei gegeben der 8. Schewâl 847.

840 aus Taf. XI. *b*. 297668
7 aus Taf. XI. *a*. 2126
8 Schewâl aus Taf. VIII. . . 274
Summe . . . 300068.

Findet man die gegebene Jahrzahl selbst in Taf. XI. *b*., so hat man nicht diese, sondern nach den Worten der Regel die *nächst kleinere* zu nehmen, weil das Jahr, welches man zählt, also auch die mit ihm schliefsende Periode, noch nicht abgelaufen ist. Wäre z. B. irgend ein Datum aus dem Jahre 990 gegeben, so hätten wir aus XI. *b*. 960 und aus XI. *a*. 30 zu nehmen.

Wenn man umgekehrt eine Anzahl von Tagen hat, welche man auf Jahre und Monate im Mohammed. Kalender reduciren soll, so ist das Verfahren dieses:

Man subtrahirt von der gegebenen Zahl die möglich-gröfste Anzahl von Tagen aus Taf. XI. b. und notirt die nebenstehende Jahrzahl; von dem Rest subtrahirt man die möglich-gröfste Zahl von Tagen aus XI. a. und addirt die daneben stehende Jahrzahl zu der vorigen; von dem Reste endlich subtrahirt man die möglich-gröfste Zahl aus Taf. VIII. b. Der Rest zeigt den Monatstag.

Z. B. 300068 Tage auf den Mohammed. Kalender zu reduciren.

300068; davon aus Tab. XI. *b*.
297668 bei dem Jahre 840,
2400; davon aus XI. *a*.
2126 bei dem Jahre 7,
274; davon aus Taf. VIII.
266 bei dem Monat Schewâl.
8.

Demnach ist das Resultat 847. 8. Schewâl.

Es ist hier nur zu beachten, dafs man, wenn nach Abzug der dem Periodenjahre entsprechenden Anzahl von Tagen ein Rest bleibt, der kleiner als 354 ist, nicht vergesse, davon in Gedanken 0 aus Taf. XI. *a*. zu subtrahiren, d. h. zu dem aus XI. *b*. gefundenen Jahre noch 1 zu addiren, weil die restirenden Tage in das folgende Jahr fallen.

Die entsprechenden Rechnungen im Julianischen Kalender sind denen im Mohammedanischen ganz entsprechend. Da aber hier der Zweck dieser Reductionen die Vergleichung beider Kalender ist, so ist Taf. XII. *a.*, welche hier nur vier Jahre enthält, so eingerichtet, dafs 622 als erstes Jahr, also das dritte als Schaltjahr gedacht ist. Ich habe nicht nöthig, die eben für den Mohammedanischen Kalender gegebenen Regeln hier zu wiederholen, zumal wir sie unten an vollständigen Beispielen sehen werden.

Um bei der Reduction der beiden Kalender sicherer zu rechnen, ist es erforderlich, das in einem Kalender gegebene Datum auf den Anfangstag des andern zu reduciren. Nun sind vom 1. Januar bis zum 15. Juli exclusive 195 Tage verflossen. Demnach mufs man diese Anzahl von Tagen zu dem Mohammed. Datum addiren, um auf den 1. Januar 621 zu gelangen. Ebenso aber mufs man von dem gegebenen Julianischen Datum 621 Jahre und 195 Tage subtrahiren, um auf den 1. Moh. des Jahres 1 zu gelangen.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun die Reductionsregeln selbst geben, an denen nichts weiter zu erläutern sein wird.

1. Reduction des Mohammedanischen Datums auf das Julianische.

Man verwandle die gegebenen Jahre und Monate in Tage, addire dazu 195, verwandle diese Summe in Julianische Jahre und Monate und addire zu der Jahrzahl 621, so ist das Resultat das gesuchte.

Z. B.: Auf welchen Tag des Julianischen Kalenders fällt der 5. Rebia I. des Jahres 1259?

1230	435871		
29	9922		
5. Rebia I. . . .	64		
constant	195		
	446052		
davon . . .	438300	=	1200 Jul. Jahre,
	7752		
	7305	=	20 - -
	447		
	365	=	2 - -
	82		1222, dazu
davon März aus Taf. IV. . . .	59		621
	23		1843

Antwort: Auf den 23. März 1843, das ist, auf den 4. April Gregor. Styls.

2. *Reduction des Julianischen Datums auf das Mohammedanische.*

Man subtrahire 621 von der Julianischen Jahrzahl und verwandle den Rest in Tage. Von diesen Tagen subtrahire man 195, reducire den Rest auf Mohammedanische Jahre und Monate, so ist das Resultat das gesuchte.

Z. B.: Auf welches Mohammedanische Datum fiel der 5. Oct. 1582?

1582 — 621	=	961,	
900 Jahre	=	328725	Tage,
60 -	=	21915	-
1 -	=	0	-
5. Oct. . . .	=	278	-
		350918	-
davon . . .		195	-
		350723	-
davon gehen . . .		340192	- auf 960 Jahre,
		10531	-
		10277	- 30
		254	- 990
Ramadhân . . .		236	-
		18	

Antwort: Auf den 18. Ramadhân 990.

Alle hier gegebenen Regeln gelten ganz ohne Einschränkung. Sie lassen sich aber zum Theil sehr vereinfachen, wenn man sie auf einen bestimmten Zeitraum beschränken will. Als Beispiel will ich die Regel für die Berechnung des Gregorianischen Osterfestes im gegenwärtigen Jahrhundert geben.

Man nenne den Rest I. a., den Rest II. b., addire zu 44 dasjenige Vielfache von 30, welches zunächst kleiner ist als $11a+6$; von der Summe subtrahire man $11a$, so ist der Ueberschufs das Ostervollmondsdatum, welches wir V nennen. $V+2$ dividire man durch 7 und nenne den Rest r; dann dividire man den Rest b durch 4; der Quotient sei q; $b+r+q$ subtrahire man von dem zunächst gröfseren Vielfachen von 7 und addire den Ueberschufs zu V, so ist die Summe das Osterdatum.

Zur Anwendung dieser Regel hat man gar keine Tafel nöthig, wenn man nur die Mühe nicht scheut, die Divisionen der Jahrzahl durch

19 und durch 28 wirklich auszuführen. Auch läfst sie sich durch ganz kleine Aenderungen auf jedes andere Jahrhundert anwenden, indem man nur statt 44 (Vollmondsdatum für $a = 0$) und statt der 2 zur Aufsuchung des Restes r (Zahl und Taf. V.) die dem Jahrhundert entsprechenden substituirt.

In Formeln kann man die Regel für gegenwärtiges Jahrhundert so ausdrücken. Die Jahrzahl sei N, das Osterdatum O;

$$N = 19m + a = 28n + b$$

$$44 + 30k - 11a = V$$

$$30k \lessgtr \begin{matrix} 11a + 6 \\ 11a - 24 \end{matrix}$$

$$V + 2 = 7h + r$$

$$b = 4q + x$$

$$7p - (b + q + r) = d$$

$$d \begin{matrix} < 8 \\ > 0 \end{matrix}$$

$$V + d = O.$$

Taf. I.

b.	a.	
19	400	1
38	800	2
57	1200	3
76	1600	4
95	2000	5
114		
133		
152		
171		
190		
209		
228		
247		
266		
285		
304		
323		
342		
361		
380		
399		

Taf. II.

28	364
56	392
84	420
112	448
140	476
168	504
196	532
224	560
252	588
280	616
308	644
336	672

Taf. III.

	0	—	1	2	3	4	—
	5	6	7	8	—	9	10
	11	12	—	13	14	15	16
	—	17	18	19	20	—	21
	22	23	24	—	25	26	27
Vor Chr.	6	5	4	3	2	1	7
Nach Chr.	4	5	6	7	1	2	3

Taf. IV.

	a. Gem. Jahr.	*a.* Schalt-jahr.	*b.* Gem. Jahr.	*b.* Schalt-jahr.
Januar	0	0	0	0
Februar	3	3	31	31
März	3	4	59	60
April	6	0	90	91
Mai	1	2	120	121
Juni	4	5	151	152
Juli	6	0	181	182
August	2	3	212	213
September	5	6	243	244
October	0	1	273	274
November	3	4	304	305
December	5	6	334	335

Taf. V.

1582 — 1699	1700 — 1799	1800 — 1899	1900 — 2099	2100 — 2199
10	11	12	13	14
4	3	2	1	0

Taf. VI.

	0 6 — 17 23	1 7 12 18 —	2 — 13 19 24	3 8 14 — 25	— 9 15 20 26	4 10 — 21 27	5 11 16 22 —
0	42	41	40	39	38	37	43
1	28	27	26	32	31	30	29
2	49	48	47	46	45	51	50
3	35	34	33	39	38	37	36
4	28	27	26	25	24	23	29
5	42	48	47	46	45	44	43
6	35	34	33	32	31	37	36
7	56	55	54	53	52	51	50
8	42	41	40	39	45	44	43
9	28	34	33	32	31	30	29
10	49	48	47	53	52	51	50
11	42	41	40	39	38	37	36
12	28	27	26	25	31	30	29
13	49	48	47	46	45	44	50
14	35	34	33	39	38	37	36
15	28	27	26	25	24	23	22
16	42	41	47	46	45	44	43
17	35	34	33	32	31	30	36
18	49	55	54	53	52	51	50
*	7	6	5	4	3	2	1

Taf. VII.

	1583 — 1699	1700 — 1899	1900 — 2199
0	43	44	45
1	32	33	34
2	21	22	23
3	40	41	42
4	29	30	31
5	48	49	50
6	37	38	39
7	26	27	28
8	45	46	47
9	34	35	36
10	23	24	25
11	42	43	44
12	31	32	33
13	50	21	22
14	39	40	41
15	28	29	30
16	47	48	49
17	36	37	38
18	25	26	27

Taf. VIII.

	a.	*b.*
Moharrem	0	0
Safer	2	30
Rebia I.	3	59
Rebia II.	5	89
Gemâdi I.	6	118
Gemâdi II.	1	148
Regeb	2	177
Schabân	4	207
Ramadhân	5	236
Schewâl	0	266
Dsilkade	1	295
Dsilhige	3	325

Taf. IX.

0	0
1	5
2	3
3	1
4	6
5	4
6	2

Taf. X.

0 8 16	1 9 17 25	2 10 18 26	3 11 19 27	4 12 20 28	5 13 21 29	6 14 22	7 15 23	24
7	4	1	6	3	7	5	2	6

Taf. XI.

a.		*b.*	
		30	10631
1	0	60	21262
2	354	90	31893
3	709	120	42524
4	1063	150	53155
5	1417	180	63786
6	1772	210	74417
7	2126	240	85048
8	2481	270	95679
9	2835	300	106310
10	3189	330	116941
11	3544	360	127572
12	3898	390	138203
13	4252	420	148834
14	4607	450	159465
15	4961	480	170096
16	5316	510	180727
17	5670	540	191358
18	6024	570	201989
19	6379	600	212620
20	6733	630	223251
21	7087	660	233882
22	7442	690	244513
23	7796	720	255144
24	8150	750	265775
25	8505	780	276406
26	8859	810	287037
27	9214	840	297668
28	9568	870	308299
29	9922	900	318930
30	10277	930	329561
		960	340192
		990	350823
		1020	361454
		1050	372085
		1080	382716
		1110	393347
		1140	403978
		1170	414609
		1200	425240
		1230	435871
		1260	446502

Taf. XII.

a.		*b.*	
		4	1461
1	0	8	2922
2	365	12	4383
3	730	16	5844
4	1096	20	7305
		24	8766
		28	10227
		32	11688
		36	13149
		40	14610
		44	16071
		48	17532
		52	18993
		56	20454
		60	21915
		64	23376
		68	24837
		72	26298
		76	27759
		80	29220
		84	30681
		88	32142
		92	33603
		96	35064
		100	36525
		200	73050
		300	109575
		400	146100
		500	182625
		600	219150
		700	255675
		800	292200
		900	328725
		1000	365250
		1100	401775
		1200	438300

Zweiter Beitrag.

Der Kalender der Juden.

Die Juden haben, man weifs nicht genau seit wann, einen Kalender, der an Künstlichkeit kaum seines Gleichen hat. Bürgerliche und religiöse Rücksichten und Vorurtheile haben in eine ursprünglich ziemlich regelmäfsige Anordnung einen solchen Wirrwarr gebracht, dafs dieser Kalender jetzt einem wahren Labyrinthe ähnlich sieht und Rechnungen in dem Gebiete desselben zu den unangenehmsten gehören, die man sich denken kann. Ich habe mich bemüht, durch Anfertigung einiger Tabellen, die ich in dem Folgenden motiviren und beschreiben will, einige dieser Rechnungen zu vereinfachen. Mit der Aufgabe, den Wochentag irgend eines Jüdischen Datums zu finden, ist es mir vollkommen gelungen. Die zweite Aufgabe, die ich hier mittheile, die Vergleichung des Jüdischen mit dem Julianischen Kalender, habe ich zwar vereinfacht, aber nicht in dem Grade, wie ich es gewünscht hätte. Da ich aber zweifle, dafs bei der Verwirrung in den Elementen, auf welche diese Rechnungen sich basiren, die Aufgabe einfacher sich lösen lasse, so trage ich kein Bedenken, auch diese hier mitzutheilen. Zunächt will ich, so kurz es sich thun läfst, die Data auseinander setzen, auf welche meine Methode sich stützt und welche zum Verständnifs derselben unumgänglich nöthig sind.

Der Jüdische Tag beginnt mit Sonnenuntergang, für welchen Zeitpunct späterhin als feste Grenze 6 Uhr Abends nach unserer Uhr angenommen ist. Diese Vorstellung, vom Einbruche der Nacht ab den neuen Tag zu zählen, ist sehr alt; wir finden dieselbe schon im ersten Kapitel der Genesis: „es ward Abend, es ward Morgen, ein Tag", wo wir Abend und Morgen umstellen würden. Der Tag wird in 24 Stunden, die von 1 bis 24 gezählt werden, die Stunde in 1080 Ch'lakim (Theile) getheilt, deren 18 also eine Minute ausmachen. Sieben Tage bilden eine Woche, welche mit Sonntag (nach unserer Zeit Sonnabend Abends 6 Uhr) beginnt und deren Tage ich in dem Folgenden durch die Zahlen 1 bis 7 bezeichnen werde. Der Monat währt von einem Neumonde bis zum folgenden, und wurde in den ältesten Zeiten empirisch bestimmt, d. h. man begann

einen neuen Monat, wenn man nach der Unsichtbarkeit des Mondes zuerst wieder den sichelförmigen Streifen am Himmel gewahr ward; daher heifst der Monat *Chodesch* (Erneuerung), und der Augenblick jener Erscheinung der *Moled* (Geburtsmoment). Späterhin hat man für die Zeit von einem Moled bis zum nächstfolgenden eine bestimmte Zahl angenommen, und zwar 29 Tage 12 Stunden 793 Ch'lakim. In der Praxis wird diese Länge des Monats so dargestellt, dafs man ordentlich den Monaten abwechselnd 30 und 29 Tage giebt. Zwölf Monate machen in der Regel ein Jahr aus, und die Namen derselben in ihrer ursprünglichen Reihenfolge sind:

1.	Nisan	mit 30	Tagen.	7.	Thischri	mit 30	Tagen.
2.	Jjjar	- 29	-	8.	Marcheschvan	- 29	-
3.	Sivan	- 30	-	9.	Kislev	- 30	-
4.	Thamuz	- 29	-	10.	Tebeth	- 29	-
5.	Ab	- 30	-	11.	Schebat	- 30	-
6.	Elul	- 29	-	12.	Adar	- 29	-

Gegenwärtig, ich weifs nicht seit wann, hat man den Jahresanfang um sechs Monate verschoben, und man beginnt das Jahr mit dem ersten Tage des Monats Thischri. Die erste Abweichung von dieser Anordnung, welche eintreten kann, ist die, dafs die Länge der Monate Marcheschvan und Kislev schwankt, so dafs gegen das Gesetz der Abwechselung beide 30, auch beide 29 Tage erhalten können; wir werden unten sehen, aus welchen Gründen. Sodann waren zur Bestimmung des wichtigsten Festes, des Passah (Pésach) zwei Data gegeben; erstens sollte es immer auf den 15. Nisan, zweitens aber auch auf den Tag des Vollmondes fallen, welches unmittelbar dem Frühlingsäquinoctium folgt. Da nun zwölf Neumonde in der Regel um 11 Tage kürzer sind als ein Sonnenjahr, so wurde, um der zweiten Bedingung zu genügen, die Bestimmung getroffen, dafs, wenn nach Ablauf der 12 Monate Nisan so frühe im Sonnenjahr zu liegen kam, dafs das Passahfest vor das Aequinoctium fallen würde, am Ende des Jahres ein voller Monat von 30 Tagen eingeschaltet werden sollte. Dieser Monat bekam keinen eigenen Namen, sondern hiefs entweder Adar Scheni, der zweite Adar, oder noch gewöhnlicher Ve-Adar, und Adar, noch ein Adar. Gegenwärtig liegt der Schaltmonat in der Mitte des Jahres, weil dieses mit Thischri beginnt. Wenn übrigens die heutigen Juden nicht den zweiten, sondern den ersten Adar für den Schaltmonat halten, und daher nicht jenem,

sondern diesem 30 Tage geben, und deshalb auch die in den Adar fallenden Feste im Schaltjahre in den zweiten Adar verschieben, so ist das eine Caprice, ähnlich der christlichen, welche nicht den 29., sondern den 24. Februar als Schalttag bezeichnet. Bei der spätern Fixirung des Kalenders wurde nun bestimmt, dafs in einem festen Cyclus von neunzehn Jahren allemal sieben, nämlich 3. 6. 8. 11. 14. 17. 19. dreizehn Monate erhalten sollten. Fassen wir das Gesagte zusammen, so erhalten wir folgende Resultate:

Länge des Monats	29 Tage	12 Stunden	793 Ch'lakim.
- - Gemeinjahres ..	354 -	8 -	876 -
- - Schaltjahres ..	383 -	21 -	589 -
- - Cyclus	6939 -	16 -	595 -

Da wir vorläufig blofs die Wochentage, nicht die Länge eines Zeitraumes zu berücksichtigen haben, so nehmen wir statt der hier stehenden Tage nur ihre Reste von 7; was dann übrig bleibt, heifst der *Character* des Zeitraumes. Lassen wir zugleich der Kürze wegen, und weil sich diese Zahlenformen immer wiederholen, die Bezeichnungen der Tage, Stunden und Ch'lakim weg, so erhalten wir

den Character des Monats	1	2	793
- - - Gemeinjahres ..	4	8	876
- - - Schaltjahres ...	5	21	589
- - - Cyklus	2	16	595

Der Anfang der Jüdischen Aera, auf Thischri reducirt, fällt auf Montag den 7. October des Jahres 3761 v. Chr., angeblich das Datum der Schöpfung, und zwar genau fiel der Moled Thischri des Jahres 1 auf 2 5 204. Um nun den Moled irgend eines Monats zu finden, dividire man die Jahrzahl durch 19; der Quotient sei q, der Rest r, so zeigt q die Anzahl der bereits vollständig abgelaufenen Cyclen, $r-1$ die Anzahl der in dem Cyclus bereits vollendeten Jahre. Es sei $r-1=g+s$, so dafs g die in $r-1$ enthaltenen Gemeinjahre, s die Schaltjahre bezeichnet; m endlich sei die Stellenzahl des Monats im Jahre, so werden wir den Moled des gesuchten Monats aus folgender Formel erhalten:

$$(2\ 5\ 204)+q(2\ 16\ 595)+g(4\ 8\ 876)+s(5\ 21\ 589)+(m-1)(1\ 12\ 793),$$

wo man dann statt der vollständigen Tage nur ihre Reste von 7 zu neh-

men hat. Das letzte, in $(m-1)$ multiplicirte Glied ist aber unnütz, weil man in der Praxis nie einen andern Moled, als den des Jahresanfanges braucht. Für die Praxis ist es aber zweckmäfsig, eine Tabelle anzufertigen, welche den Moled Thischri jedes Jahres direct giebt, zumal die Berechnung einer ganzen Tabelle der Art nicht viel weitläufiger ist als die Berechnung eines einzelnen Moled nach der eben gegebenen Formel. Eine solche Tabelle wird in zwei Theile zerfallen, deren erster der Moled des ersten Jahres jedes neunzehnjährigen Cyclus, der zweite die Anzahl von Tagen, Stunden und Chlakim enthält, welche für jedes der neunzehn Jahre zu dem Moled des ersten Jahres zu addiren ist, um den Moled des gegebenen Jahres zu finden. Den ersten Theil der Tafel erhält man, wenn man zu dem constanten Anfangspunct, nämlich 2 5 204, successive immerfort 2 16 595, den Character des Cyclus, addirt. Man kann sich aber dieses Geschäft sehr erleichtern, wenn man bedenkt, dafs 13(2 16 595) $=$ 6 23 175, d. h. wenn der Moled des ersten Jahres des Cyclus $A=p$ ist, so ist der Moled des ersten Jahres des Cyclus $A+13=p-905$ Chlakim. Man berechne also durch successive Addition von 2 16 595 den Moled der ersten dreizehn Perioden und stelle diese in eine Horizontalreihe neben einander, und nun bilde man unter jedem Moled dieser Reihe eine Verticalcolumne, indem man immer von dem drüber stehenden Moled 905 Chlakim subtrahirt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, 175 Chlakim addirt und 1 Stunde subtrahirt. Auf diese Weise findet man die Moled sämmtlicher erster Jahre mit grofser Leichtigkeit bis zu jeder beliebigen Ausdehnung. Der zweite Theil der Tafel wird so construirt, dafs man an das Jahr 1 den Moled 6 schreibt, an das Jahr 2 den Moled 4 8 876, den Character des Gemeinjahres; zu diesem addirt man wieder 4 8 876, weil auch das zweite Jahr Gemeinjahr ist; dann addirt man zu dem letztgefundenen Resultat den Character des Schaltjahres u. s. w. fort bis zum neunzehnten Jahre. Man findet diese Zuschüsse für die neunzehn Jahre in der Tafel IV. unter dem Buchstaben D. Die Tafel I. unter dem Buchstaben B giebt den Moled des ersten Jahres für die Vielfachen von $247=13.19$, und rechts von C die Zuschüsse für die ersten zwölf Vielfachen von 19; nur sind in den Horizontalcolumnen C die Tage, Stunden und Chlakim nicht, wie sonst, neben einander, sondern zur Ersparung des Raumes unter einander gestellt. Man findet demnach den Moled irgend eines Jahres, wenn man von der Jahrzahl die zunächst kleinere Zahl, die in Taf. I. unter A steht, subtrahirt

und den unter *B* stehenden Moled notirt. Von dem Rest subtrahirt man ferner die nächst kleinere Zahl, die rechts von *A* steht, und schreibt den über derselben stehenden Moled unter den erst notirten; den zweiten Rest sucht man in Taf. IV. links und schreibt den unter *D* stehenden Moled unter die beiden notirten, so ist die Summe der drei notirten Zahlen der gesuchte Moled, oder kurz ausgedrückt, der Moled eines gegebenen Jahres ist $= B + C + D$.

Für die Construction des Kalenders gilt nun im Allgemeinen die Regel, dafs *das Jahr an dem Tage beginnt, auf welchen nach der Rechnung der Moled Thischri fällt.* Besondere Rücksichten machen aber hievon einige Ausnahmen nöthig, welche ich zunächst erörtern mufs.

Erste Ausnahme. Die Juden dürfen bekanntlich am Sabbat und an Festtagen nicht arbeiten, müssen also die für solche Tage nöthigen Speisen Tages zuvor bereiten. Um nun für die Bekenner des Gesetzes die Unbequemlichkeit zu vermeiden, dafs sie ihre Speisen auf zwei Tage vorher bereiten müssen, ist die Bestimmung getroffen, dafs ein Sabbat und ein Festtag nicht unmittelbar auf einander folgen dürfen. Besonders ist diese Regel für die beiden ersten grofsen Feste im Jahre, für das Neujahrsfest und das Versöhnungsfest (Jom Kippur) durchgeführt. Neujahr darf also nicht auf Sonntag und Freitag fallen. Das Versöhnungsfest trifft auf den 10. Thischri, fällt also zwei Wochentage später als Neujahr. Da nun auch dieses Fest nicht auf Sonntag und Freitag fallen darf, so darf deshalb Neujahr nicht auf Mittwoch und Freitag fallen. Demnach haben wir das Gesetz vollständig so: *Wenn nach der Rechnung der Moled Thischri auf Sonntag, Mittwoch oder Freitag fällt, so wird der Jahresanfang auf den folgenden Tag verlegt.*

Zweite Ausnahme. Nachdem man statt der Beobachtung des Moled die Berechnung desselben eingeführt hatte, hielt man doch noch insoweit an der alten Sitte fest, dafs man nicht den blofs theoretisch gefundenen, sondern den sichtbaren neuen Mond feiern wollte. Fällt daher der berechnete Moled so spät am Tage, dafs zu erwarten steht, man werde bis zu dem Ende desselben (6 Uhr Abends unserer Zeit) die Sichel nicht mehr gewahr werden, so zieht man es vor, das Neujahrsfest ebenfalls auf den folgenden Tag zu verlegen; und zwar ist als feste Grenze für den Moled die 18te, d. h. die Mittagstunde angenommen. Man kann das hieraus

hervorgehende Gesetz aber folgendermafsen beschränken: *Fällt nach der Rechnung der Moled Thischri Montag auf oder nach 18 Stunden, so wird Neujahr auf Dienstag verlegt.*

Dritte Ausnahme. Der Grund, weshalb das vorige allgemeine Gesetz nur Montags Anwendung findet, ist der, weil von den drei übrigen Tagen, Dienstag, Donnerstag und Sonnabend, wegen der ersten Ausnahme das Neujahrsfest nicht auf den folgenden Tag verlegt werden darf. Hier combiniren sich die beiden vorigen Ausnahmen, und das Gesetz heifst: *Wenn der Moled Thischri nach der Rechnung Dienstag, Donnerstag oder Sonnabend auf oder nach 18 Stunden fällt, so wird der Jahresanfang zwei Tage später gefeiert und respective auf Donnerstag, Sonnabend und Montag verschoben.*

Durch diese drei Ausnahmen, welche man *allgemein* nennen kann, weil sie von jedem Jahre ohne Unterschied gelten, erhält sowohl das Gemeinjahr als das Schaltjahr eine schwankende Länge; und zwar kann das Gemeinjahr 353, 354, 355, das Schaltjahr 383, 384, 385 Tage umfassen. Diese sechs verschiedenen Jahre sind aber auch die einzig gestalteten, und man nennt sowohl das Gemeinjahr als das Schaltjahr, welches auf die Ziffer 4 ausgeht, *regelmäfsig*, das auf 3 *mangelhaft*, das auf 5 *überschüssig*. Dargestellt werden diese Unterschiede in den Monaten Marcheschvan und Kislev, von welchen im regelmäfsigen Jahre der erstere 29, der zweite 30 Tage hat; im mangelhaften Jahre haben beide 29, im überschüssigen beide 30 Tage. Da aber zuweilen der Fall eintritt, dafs die erwähnten Ausnahmen ein Jahr liefern, welches nicht innerhalb dieser legitimen Grenzen liegt, so werden noch zwei *specielle Ausnahmen* nöthig.

Vierte Ausnahme. *Wenn der Moled Thischri eines Gemeinjahres A, Dienstag auf oder nach 9 Stunden 204 Chlakim fällt,* so würde, wenn wir dazu den Character des Gemeinjahres = 4 8 876 addiren, der Moled Thischri des Jahres $A+1$ Sonnabend auf oder nach 18 Stunden fallen, Neujahr des Jahres $A+1$ also erst Montag eintreten. Dadurch aber erhielte das Jahr A eine Länge von 356 Tagen, die nicht gestattet ist. Daher wird in diesem Falle *Neujahr des Jahres A von Dienstag auf Donnerstag verlegt.*

Fünfte Ausnahme. *Wenn der Moled Thischri eines Gemeinjahres A, welchem ein Schaltjahr A—1 unmittelbar vorhergeht, auf Mon-*

tag 15 Stunden 589 Chlakim oder später fällt, so ist, wenn wir davon den Character des Schaltjahres = 5 21 589 subtrahiren, der Moled Thischri des Jahres $A-1$ auf Dienstag 18 Stunden oder später gefallen, Neujahr also von Dienstag auf Donnerstag verlegt worden. Demnach hätte das Schaltjahr $A-1$, wenn das Jahr A wirklich Montag anfinge, nur eine Länge von 382 Tagen. Da ein solches Jahr nicht zulässig ist, *so wird in dem Falle das Neujahrfest des Jahres A von Montag auf Dienstag verlegt.* Da dasselbe nach der zweiten Ausnahme auch schon geschehen würde, wenn der Moled des Jahres A auf Montag 18 Stunden fiele, also zwischen der Veranlassung der zweiten und der fünften Ausnahme nur ein Zeitraum von 2 Stunden 491 Chlakim liegt, und aufserdem noch die Bedingung hinzutritt, dafs das vorhergehende Jahr Schaltjahr ist, so ist begreiflich, dafs diese Ausnahme selten in Anwendung kommt. Wenn der Jüdische Kalender wirklich von dem Datum herrührte, von dem seine Berechnung ausgeht, woran freilich nicht zu denken ist, so würde doch in den 5600 Jahren, welche er bis jetzt hinter sich hätte, diese Ausnahme erst ein und dreifsigmal, also durchschnittlich alle hundert und achtzig Jahre einmal vorgekommen sein. Zuletzt traf sie ein im Jahre 5519 (1758), und das nächstemal wird sie im Jahre 5688 (1927) stattfinden.

Nun noch, bevor ich weiter gehe, ein paar Worte über die Namen, mit denen die Jüdischen Schriftsteller diese Ausnahmen bezeichnen. Bekanntlich drücken die Juden die Zahlen durch die Buchstaben ihres Alphabets aus. Die Bildung der in Rede stehenden Namen geschieht nun in der Art, dafs sie die Veranlassung jeder einzelnen Ausnahme in Zahlen ausdrücken und die Zahlbuchstaben als ein Wort aussprechen. Die erste Ausnahme hatte ihre Veranlassung in den Tagen Sonntag = 1, Mittwoch = 4, Freitag = 6; nun ist $1 = a$, $4 = d$, $6 = v$, demnach heifst diese Ausnahme *Adu.* Die zweite hatte ihre Veranlassung in den 18 Stunden; nun ist $10 = j$, $8 = ch$; daher der Name *Jach.* Die dritte ist die Combination der beiden ersten und heifst darum *Jach-Adu.* Die vierte rührt her von 3 Tage 9 Stunden 204 Chlakim; nun ist $3 = g$, $9 = t$, $200 = r$, $4 = d$, daher der Name *Gatrad.* Die fünfte endlich wurde veranlafst durch Montag, d. h. 2 Tage 15 Stunden 589 Chlakim; nun ist $2 = b$, $15 = tv$ (d. i. $9+6$), $500 = th + k$ $(400 + 100)$, $80 = p$, $9 = t$, daher der Name *Btuthakpat.*

Um die Wirkungen der fünf Ausnahmen, deren stete Berücksichtigung begreiflicherweise die Rechnung erschwe.. und häufige Rechnungs-

fehlen begünstigt, dem Auge zu vergegenwärtigen, gebe ich folgende kleine Tafel, welche für die drei Classen von Jahren, auf die es hier ankommt, nämlich Schaltjahr, Gemeinjahr nach einem Schaltjahr, und Gemeinjahr nach einem Gemeinjahr, den frühesten Moment angiebt, in welchem der Neujahrstag auf den oben benannten Wochentag rückt. Die Jahre des Cyclus sind links durch ihre Stellenzahlen vertreten.

Taf. *P.*

	Montag.	Dienstag.	Donnerstag.	Sonnabend.
— 3 6 8 11 14 17 19	7 18 0	2 18 0	3 18 0	5 18 0
1 4 7 9 12 15 18 20	7 18 0	2 15 589	3 9 204	5 18 0
2 5 — 10 13 16 — —	7 18 0	2 18 0	3 9 204	5 18 0

Diese Zahlen, welche anzeigen, in welchem Momente der Neujahrstag auf den darüber stehenden Wochentag rückt, wollen wir die *Tagesgrenzen* nennen. Das zwanzigste Jahr, welches das erste im folgenden Cyclus ist, habe ich hinzugenommen, weil wir es künftig zur Bestimmung des neunzehnten bedürfen.

Zur vollständigen Bestimmung eines Jahres nun gehört: 1) die Kenntnifs, ob es ein Gemeinjahr oder ein Schaltjahr ist; 2) der Wochentag, auf welchen der erste Thischri fällt; 3) der Wochentag, auf welchen der erste Thischri des folgenden Jahres fällt. Diese drei Data, welche die Juden *Kebirth* nennen, reichen zur Construction des Kalenders hin. Das erste Datum ergiebt sich, wenn wir die Jahrzahl durch 19 dividiren; ist der Rest eine der Zahlen 3, 6, 8, 11, 14, 17 oder 19 (= 0), so ist das Jahr ein Schaltjahr und hat dreizehn Monate; in allen andern Fällen ist es ein Gemeinjahr. Statt des dritten Datums könnte man auch die Jahreslänge substituiren, doch ergiebt sich diese nicht so unmittelbar aus der Rechnung, wie der Anfangstag des folgenden Jahres, von dem jene abhängt. Zählt man vom Anfangstage des Jahres A bis zum Anfangstage des Jahres $A+1$ und addirt den Abstand beider Wochentage im Gemeinjahr zu 350, im Schaltjahr zu 378, so hat man die Länge des Jahres A. Hier noch einige Betrachtungen über den Zusammenhang der Anfangstage mit der Jahreslänge. Wenn man die Jahreslänge durch 7 dividirt und den Rest zu dem Wochentage addirt, mit dem das Jahr A anfängt, so zeigt die Summe den Wochentag, mit dem das Jahr $A+1$ anfängt. Fällt bei dieser Rechnung der Jahres-

anfang des Jahres $A+1$ auf Sonntag, Mittwoch oder Freitag, so ist es ein Zeichen, dafs ein Jahr von der angenommenen Länge mit dem angenommenen Wochentage nicht beginnen könne. Z. B. 354 läfst durch 7 dividirt den Rest 4; addiren wir diesen Rest zu den vier Wochentagen 2, 3, 5, 7, mit denen ein Jahr anfangen kann, so sind die Summen oder ihre Reste von 7 respective 6, 7, 2, 4, von denen nur die beiden mittleren wieder Neujahrstage sein können; daraus folgt, dafs ein Jahr von 354 Tagen, d. h. ein regelmäfsiges Gemeinjahr, nur an den Tagen Dienstag und Donnerstag, nicht Montag und Sonnabend beginnen könne. Die Zahl 385, die Länge des überschüssigen Schaltjahres, läfst durch 7 dividirt den Rest 0, daher fangen, wenn A ein überflüssiges Schaltjahr ist, die Jahre A und $A+1$ immer mit demselben Wochentage an. Da keine der übrigen fünf Zahlen, welche die Jahreslängen ausdrücken, durch 7 ohne Rest sich dividiren läfst, so gilt der eben ausgesprochene Satz auch umgekehrt: allemal, wenn zwei Jahre hintereinander mit demselben Wochentage beginnen, ist das erstere ein überschüssiges Schaltjahr. Von der ersteren Regel kommt nur eine Ausnahme vor. Die Grenzen des Moled, welche den Neujahrstag eines Schaltjahres auf Dienstag legen, sind von 2 18 0 inclusive bis 3 18 0 exclusive; addiren wir zu beiden Tagesgrenzen den Character des Schaltjahres, so erhalten wir den Moled Thischri des folgenden Jahres innerhalb der Grenzen 1 15 589 inclusive und 2 15 589 exclusive; daraus folgt, dafs, wenn ein Schaltjahr Dienstags beginnt, das folgende Jahr immer Montags anfängt, das Jahr also durchaus nur regelmäfsig sein kann. Die folgende kleine Tabelle, welche oben den Anfangstag, links die Länge des Jahres A, in ihren Fonds den Anfangstag des Jahres $A+1$ giebt, wird hier zur Uebersicht dienen; die leeren Stellen im Fonds der Tafel zeigen an, dafs der Anfangstag oben mit der Jahreslänge links nicht zusammentreffen könne.

Taf. Q.

	Montag	Dienstag	Donnerstag	Sonnabend
353	Donnerstag	—	—	Dienstag
354	—	Sonnabend	Montag	—
355	Sonnabend	—	Dienstag	Donnerstag
383	Sonnabend	—	Dienstag	Donnerstag
384	—	Montag	—	—
385	Montag	—	Donnerstag	Sonnabend

Aus dieser Tafel kann man auch leicht, wenn die Anfangstage der Jahre A und $A+1$ gegeben sind, die Länge des Jahres A finden, wenn man nur weiſs, ob dasselbe Gemeinjahr oder Schaltjahr ist.

Bezeichnen wir nun die drei Bestimmungen *regelmäſsig, mangelhaft, überflüssig* mit ihren Anfangsbuchstaben, und zwar im Gemeinjahr mit dem kleinen, im Schaltjahr mit dem groſsen Buchstaben, und setzen wir diesen Buchstaben den Anfangstag des Jahres als Zahl vor, so haben wir eine sehr kurze aber ganz vollständige *Definition des Jahres,* welche Alles enthält, was zu der Construction des Kalenders zu wissen nöthig ist. Von den möglichen 24 Combinationen der Elemente m, r, u, M, R, U mit 2, 3, 5, 7 sind aber, wie die letzte Tafel zeigt, nur folgende 14 reell:

$2m$, $2u$, $2M$, $2U$,
$3r$, $3R$,
$5r$, $5u$, $5M$, $5U$,
$7m$, $7u$, $7M$, $7U$.

Wir haben also, wenn wir den Anfangstag, die Jahreslänge und den Schaltmonat berücksichtigen, vierzehn von einander verschiedene Jahre als die einzigen, die bei der ewigen Wiederkehr des Jahres im Kalender erscheinen können.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun zur Sache selbst schreiten, nämlich zu der Construction einer Tafel, welche für die Praxis die bisherigen Schwierigkeiten beseitigt, indem sie die Berechnung und Betrachtung des Moled, so wie die Berücksichtigung der fünf Ausnahmen unnöthig macht.

Zunächst ist klar, daſs mit dem Moled Thischri des ersten Jahres eines Cyclus der Moled jedes Jahres des Cyclus, also auch die wirklichen Jahresanfänge sämmtlicher neunzehn Jahre gegeben sind. So oft daher zwei Cyclen mit demselben Moled Thischri beginnen, ist die Reihenfolge der durch die oben erklärten Zeichen definirten Beschaffenheit der Jahre in beiden Cyclen dieselbe. Nehmen wir also für den Moled Thischri eines ersten Jahres die früheste Grenze an, bei welcher der Neujahrstag dieses Jahres auf Montag fällt, also 7 18 0, so wird die Reihenfolge der Jahre dieses Cyclus, welche man findet, wenn man zu 7 18 0 die in Taf. IV. unter D stehenden Zahlen addirt, folgende sein (die Schaltjahre sind mit einem Sternchen bezeichnet):

Taf. *R.*

Stellen-zahl.	Moled Thischri.			Anfangstag.	Defini-tion.
1	7	18	0	Montag	2 *m*
2	5	2	876	Donnerstag	5 *r*
*3	2	11	672	Montag	2 *U*
4	1	9	181	Montag	2 *m*
5	5	17	1057	Donnerstag	5 *u*
*6	3	2	853	Dienstag	3 *R*
7	2	0	362	Montag	2 *u*
*8	6	9	158	Sonnabend	7 *M*
9	5	6	747	Donnerstag	5 *r*
10	2	15	543	Montag	2 *u*
*11	7	0	339	Sonnabend	7 *U*
12	5	21	928	Sonnabend	7 *m*
13	3	6	724	Dienstag	3 *r*
*14	7	15	520	Sonnabend	7 *U*
15	6	13	29	Sonnabend	7 *u*
16	3	21	905	Donnerstag	5 *r*
*17	1	6	701	Montag	2 *M*
18	7	4	210	Sonnabend	7 *u*
*19	4	13	6	Donnerstag	5 *U*
20	3	10	595	Donnerstag	

Das zwanzigste Jahr mußte hinzugenommen werden, weil aus demselben die Definition des neunzehnten sich ergiebt.

So oft der Moled Thischri eines ersten Jahres auf 7 18 0 fällt, findet immer die hier gegebene Reihe in den Jahren des Cyclus statt. Stellen wir uns nun den Moled des ersten Jahres von 7 18 0 sich continuirlich durch alle sieben Wochentage hindurch fortbewegend vor, bis er wieder auf 7 18 0 gelangt, so werden alle übrigen Moled dieselbe continuirliche Bewegung mitmachen, bis sie wieder auf ihre Stelle gelangen. Nicht so die Anfangstage. So oft nämlich der Moled irgend eines Jahres eine der oben in Taf. *P.* gegebenen Tagesgrenzen erreicht, wird der Anfangstag des Jahres auf den folgenden zulässigen Wochentag hinüberspringen. So ist z. B. nach Tafel *P.* die Tagesgrenze, an welcher der Anfangstag eines Jahres von Donnerstag auf Sonnabend springt, 5 18 0; in der Tafel *R.* aber haben wir den Moled des fünften Jahres 5 17 1057: also ist derselbe

nur noch 23 Chlakim von der nächsten Tagesgrenze entfernt. Sobald also bei jener continuirlichen Bewegung der Moled des ersten Jahres auf 7 18 23 gekommen ist, kommt der Moled des fünften Jahres auf 5 18 0 und sein Anfangstag springt plötzlich von Donnerstag auf Sonnabend. Dadurch wird aber zugleich das vierte Jahr um zwei Tage länger, erhält also statt des Zeichens 2*m* das Zeichen 2*u*, und es treten in der Reihe der Jahre folgende Veränderungen ein:

4	1	9	204	Montag	2*u*
5	5	18	0	Sonnabend	7*m*
6	3	2	876	Dienstag	

Da indessen bei der geringen Differenz von 23 Chlakim kein einziger Moled irgend eines andern Jahres eine seiner Tagesgrenzen erreicht hat, so bleibt in der ganzen Reihe, aufser dem vierten und fünften Jahre, Alles unverändert. Sobald also Moled Thischri eines ersten Jahres innerhalb der Grenzen 7 18 0 inclusive und 7 18 23 exclusive liegt, giebt die Tafel *R.* die constante Reihenfolge der Jahre. Bei 7 18 23 tritt die eben erwähnte Veränderung ein, und diese neue Reihenfolge bleibt wieder constant, bis ein anderes Jahr eine seiner Tagesgrenzen erreicht; dies geschieht bei 7 20 537; hier wird der Moled des zweiten Jahres 2 18 0, sein Anfangstag springt also von Montag auf Dienstag, wodurch zugleich das neunte Jahr um einen Tag länger, also aus einem regelmäfsigen ein überschüssiges wird. Und so weiter fort. Da nun der Moled jedes der zwanzig Jahre in Tafel *R.*, auf die es hier ankommt, seine vier Tagesgrenzen zu passiren hat, so werden, während der Moled des ersten Jahres die sieben Wochentage durchläuft, im Ganzen achtzig Veränderungen der Anfangstage vorkommen. Es ereignet sich aber, dafs von diesen achtzig Veränderungen neunzehnmal zwei in demselben Momente eintreten, indem jedes Jahr einmal mit dem auf ihn folgenden zugleich eine Tagesgrenze erreicht. Es bleiben also nur ein und sechzig wirkliche Veränderungsmomente übrig, deren Grenzen man sehr leicht so finden kann, dafs man den Moled jedes Jahres der Tafel *R.* von den vier dem Jahre entsprechenden Tagesgrenzen in Tafel *P.* subtrahirt, die achtzig Reste, welche in 61 zusammenfallen, nach ihrer Gröfse ordnet und zu 7 18 0 addirt. Dann hat man sämmtliche Grenzen des Moled des ersten Jahres, an welchem Veränderungen in der Reihe der neunzehn Jahre vorgehen. Wir wollen diese Grenzen im Moled des ersten

Jahres *Uebergangsmomente* genannt. Ich habe diese Rechnung, deren Ausführung hier ohne Interesse sein würde, durchgeführt, und theile in folgender Tabelle das Resultat mit. Die erste Rubrik links enthält die fortlaufende Nummer der 61 Uebergangsmomente, welche wir die *Zahl Z* nennen wollen; die zweite enthält diese Uebergangsmomente selbst; die dritte die Stellenzahl der Jahre im Cyclus, deren Anfangstag bei dem danebenstehenden Uebergangsmomente auf den folgenden Wochentag überspringt.

Taf. S.

1	7	18	0	1	31	4	0	408	3
2	7	18	23	5	32	4	2	922	8
3	7	20	537	10	33	4	11	718	7
4	7	20	560	13.14	34	4	11	741	11.12
5	1	0	408	3	35	4	14	175	15.16
6	1	5	333	9	36	4	18	23	5
7	1	7	870	18	37	5	1	485	20
8	1	9	204	2	38	5	2	899	4
9	1	9	227	6.7	39	5	2	922	8.9
10	1	11	741	10.11	40	5	5	356	12.13
11	1	22	1051	15	41	5	5	379	17
12	1	22	1074	19	42	5	9	204	2
13	2	0	408	3.4	43	5	9	227	5.6
14	2	2	922	7.8	44	5	18	0	1
15	2	5	379	17	45	5	20	537	9.10
16	2	14	152	12	46	5	20	560	14
17	2	14	175	16	47	5	22	1074	19
18	2	15	589	1	48	6	0	408	2.3
19	2	18	23	4.5	49	6	7	870	18
20	2	20	560	14	50	6	11	718	7
21	3	1	485	20	51	6	11	741	11
22	3	5	333	9	52	6	14	175	16
23	3	5	356	13	53	6	22	1051	15
24	3	5	870	17.18	54	6	22	1074	19.20
25	3	9	204	1.2	55	7	2	899	4
26	3	9	227	6	56	7	2	922	8
27	3	11	741	11	57	7	5	356	13
28	3	20	537	10	58	7	5	379	16.17
29	3	20	560	14.15	59	7	9	227	6
30	3	22	1074	18.19	60	7	14	152	12
					61	7	16	[illegible]	20

Wenn man nun nach Maafsgabe dieser Tafel mit der in Tafel *R.* gegebenen Reihe von Jahren successive sämmtliche Veränderungen vornimmt, und jede derselben mit der ihr zukommenden Zahl *Z* bezeichnet, indem die Reihe in Taf. *R.* 1 erhält, so hat man die *Tafel II.*, welche ich unten gegeben habe und welche die 61 möglichen Gestalten des Cyclus weist. Begreif-

licherweise kommt wegen der theilweise engen Grenzen von 28 Chlakim manche Zahl Z sehr selten vor: ja eine nicht geringe Anzahl dieser Zahlen ist seit dem Beginn der jüdischen Aera bis jetzt noch gar nicht in Anwendung gekommen. Gleichwohl habe ich die *Tafel II.* vollständig mittheilen wollen, eben weil sie ein in sich abgeschlossenes Ganzes enthält.

Wenn man nun für den Anfang irgend eines Cyclus aus Taf. I. den Moled nimmt, indem man von der Jahrzahl die nächst kleinere Zahl aus der Verticalspalte *A* subtrahirt und den Rest in der Horizontalspalte *A* sucht und die beiden zu der subtrahirten Zahl und zu dem Rest gehörigen Moleds *B* und *C* addirt, wenn man dann diesen Moled in Taf. *S.* aufsucht und mit der neben der nächst kleinern stehenden Zahl *Z* in die Taf. II. geht, so zeigt diese für jedes Jahr des Cyclus den Anfangstag und die Länge in den oben beschriebenen Zeichen. Gegenwärtig schreiben z. B. die Juden das Jahr 5603; nun haben wir in Tafel I.

in der Verticalspalte *A* . . . . . 5434, dazu *B* = 1 10 814
- - Horizontalspalte *A* . . . 152, dazu *C* = 7 12 440
Moled des Jahres 5587 = 1 23 174

Der nächst kleinere Uebergangsmoment in Taf. *S.* ist 1 22 1074; die zugehörige Zahl *Z* ist 12. Diese Zahl *Z* = 12 suchen wir links in Taf. II., so zeigt die dabei stehende Reihe die Beschaffenheit der Jahre des ganzen gegenwärtigen Cyclus. Der Rest 17, den man nach Abzug der beiden Zahlen aus Taf. I. von der Jahrzahl 5603 erhält, zeigt an, dafs gegenwärtiges Jahr das 17te im Cyclus ist. Suchen wir also in Taf. II. oben 17, so finden wir in der 12ten Reihe dazu die Definition 2 *U*, d. h. gegenwärtiges Jahr ist ein Schaltjahr von 385 Tagen, welches an einem Montage begann.

Für den practischen Gebrauch habe ich die Taf. I. in der Art noch bequemer eingerichtet, dafs ich in dieselbe geradezu für jedes Vielfache von 19 die dem Cyclus zugehörige Zahl *Z* eingetragen habe, so dafs die hier oben gegebene Taf. *S.* überflüssig wird. Wenn wir also von der Jahrzahl die nächst kleinere Zahl aus der Verticalspalte *A* subtrahiren und in der Horizontalspalte *A* die Zahl suchen, welche zunächst kleiner ist als der Rest, so steht da, wo die Spalten der beiden Zahlen sich begegnen, die gesuchte Zahl *Z*; z. B. in dem eben berechneten Beispiel finden wir zu 5434 und 152 die Zahl 12, so dafs wir den Moled gar nicht berechnen dürfen.

Um aber die erste unserer Aufgaben möglichst vollständig zu lösen habe ich noch die Taf. III. hinzugefügt, welche den Wochentag anzeigt, der in jeder der vierzehn Formen des Jahres dem ersten Tage jedes Monats vorhergeht. Die Definitionszeichen aber sind nach den Zahlen geordnet, so dafs zuerst die vier am Montage beginnenden Jahre stehen u. s. w. Nach diesen Erklärungen wird die folgende practische Regel keines Commentars weiter bedürfen.

Erste Aufgabe.

Den Wochentag irgend eines gegebenen Jüdischen Datums zu finden.

Man subtrahire von der Jahrzahl die nächst kleinere Zahl aus der Verticalspalte A, von dem Ueberschufs die nächst kleinere Zahl aus der Horizontalspalte A. der Tafel I. und suche diesen zweiten Rest oben, die im Fonds der Tafel I., wohin die beiden subtrahirten Zahlen zeigen, befindliche Zahl Z links in Taf. II.; das aus Taf. II. gefundene Definitionszeichen suche man oben, den gegebenen Monat links in Taf. III., addirt das Monatsdatum zu der in Taf. III. gefundenen Zahl und dividire die Summe durch 7, so zeigt der Rest den gesuchten Wochentag.

Z. B. der 15. Nisan 5603.

Nächst kleinere Zahl aus Vert. *A* . . . 5434, Rest 169 } $Z = 12$,
- - - Horiz. *A* . . . 152, Rest 17 }

12 links, 17 oben in Taf. II. zeigen auf 2 *U*; 2 *U* oben, Nisan links in Taf. III. geben *b*, dazu 15, Summe 21, Rest von 7 ist 7, also der gesuchte Wochentag Sonnabend.

Diese Aufgabe ist also vollständig gelöset. Wir schreiten nun zu der zweiten schwierigeren Aufgabe, zu der Vergleichung des Jüdischen Kalenders mit dem Julianischen. Wir haben oben gesehen, dafs der neunzehnjährige Cyclus der Juden einen Zeitraum von 6939 Tagen 16 Stunden 595 Chlakim umfafst; neunzehn Julianische Jahre sind gleich 6939 Tagen 18 Stunden, der Unterschied beider Kalender ist also in 19 Jahren 1 Stunde 485 Chlakim. Auf die Jahrzahlen hat dieser geringe Unterschied keinen Einflufs, sondern er wird sich vorläufig, so weit für uns die Berechnung des Kalenders von Interesse ist, nur auf Tage erstrecken. Nun begann die Jüdische Aera im Jahre 3761 v. Chr. Geb. Nennen wir daher das Jüdische Jahr *J*, das christliche, in welches der Anfang jenes fällt, wenn

es vor Chr. Geb. liegt, C_1, nach Chr. Geb. C, so gelten folgende Formeln:

$$J = 3761 + C = 3762 - C_1,$$
$$C = J - 3761,$$
$$C_1 = 3762 - J.$$

Die Aufgabe, das Datum eines Kalenders auf den andern zu reduciren, müssen wir in zwei Theile theilen; nämlich in die ungefähre Bestimmung des Datums, und in die hernach vorzunehmende Regulirung dieses ungefähren Datums vermöge der ersten Aufgabe.

Die Taf. IV. enthält links die Zahl der neunzehn Jahre des Jüdischen Cyclus, unter E den Jahrestag des Julianischen Kalenders, vom 1. Januar an gezählt, der dem Jahresanfange in dem ersten Jüdischen Cyclus voranging. Addirt man zu dieser Zahl 1, so hat man den Anfang des entsprechenden Jahres im Julianischen Kalender. Die Zahl unter G in Taf. VI. zeigt den Tag, ebenfalls vom 1. Januar gerechnet, der dem Anfange des dabeistehenden Monats vorhergeht. Subtrahiren wir also von der Zahl E (Taf. V.) die nächst kleinere Zahl G (Taf. VI.), so erhalten wir das Monatsdatum im Julianischen Kalender, an welchem das entsprechende Jüdische Jahr des ersten oder Schöpfungscyclus anfing. Wären nun das mittlere Jüdische und das Julianische Jahr einander völlig gleich, so würde diese Operation den ungefähren Jüdischen Jahresanfang in Tagen des Julianischen Kalenders für alle Zeiten geben, nur um einen oder zwei unsicher, weil bei der Taf. V. die Ausnahmen des Jüdischen Kalenders nicht berücksichtigt sind. Aber neunzehn Jüdische Jahre sind um 1 Stunde 485 Chl. kleiner als neunzehn Julianische Jahre: demnach sind 314 bis 315 Jüdische Jahre um einen Tag kleiner als ebensoviele Julianische. Daher rückt alle 314 bis 315 Jahre der mittle Jüdische Jahresanfang auf ein um einen Tag kleineres Datum im Julianischen Kalender vor. Demgemäfs habe ich, $314\frac{2+3}{8} = 314\frac{5}{8}$ angenommen, in der Taf. V. eine Tafel gegeben, welche links die Jüdischen Jahre anzeigt, bei denen ein neuer Tag in der Differenz beider Kalender voll wird, und rechts diese Differenz selbst giebt, welche z. B. gegenwärtig bereits 17 Tage ausmacht. Um also den ungefähren Anfang irgend eines Jüdischen Jahres auf Julianische Zeit zu reduciren, haben wir von der um 1 vermehrten Zahl E in Taf. IV. die dem gegebenen Jahre entsprechende Zahl aus Taf. V., und von dem Ueberschusse die nächst kleinere Zahl aus Taf. VI. G zu subtrahiren. Kurz ausgedrückt: das Jüdische Neujahr sei N, so ist $N = E + 1 - V - G$.

Z. B.: Wann ungefähr fing das Jahr 5603 an? Aus Taf. I. finden wir, dafs 5603 ein 17tes Jahr ist. Taf. IV. zeigt bei 17 die Zahl 253; Taf. V. für den Zeitraum, in den 5603 fällt, die Zahl 17: demnach haben wir $253+1-17=237$. Taf. VI. *G* zeigt bei August die Zahl 212, demnach ist der gesuchte Tag der $(237-212)$te, d. i. der 25. August.

Zur Vervollständigung dieser Aufgabe, und um dieselbe auf jedes Datum auszudehnen, habe ich an die Taf. III. noch die Rubrik *F* angehängt, welche im regelmäfsigen Gemeinjahr und Schaltjahr, vom ersten Thischri gezählt, den Tag giebt, der dem 1. jedes Monats vorhergeht. Da eine Abweichung von einem Tage hier nicht in Betrachtung kommt, so war es nicht nöthig, das mangelhafte und das überschüssige Jahr mit in Rechnung zu bringen. Wenn man das will, so hat man die unter *F* gegebenen Zahlen im mangelhaften Jahre von Tebeth an um 1 zu vermindern, im überschüssigen von Kislev an um 1 zu vermehren.

Taf. VI. enthält oben in fünf Zeilen die Reste der durch 28 dividirten Jüdischen Jahrzahl; darunter bei jedem christlichen Monate den Wochentag, der dem ersten Tage desselben vorangeht, wobei jedoch das christliche Schaltjahr nicht in Anschlag gebracht ist. Daher sind, wenn das Jahr $C+1$ Schaltjahr ist, die Zahlen von März an um 1 zu vermehren. Taf. VII. enthält die ersten 24 Vielfachen von 28. Wie man mit deren Hülfe den Rest jeder Zahl von 28 finden könne, habe ich früher gezeigt.

Ich werde im Folgenden den gegebenen Monatstag *d*, das gesuchte ungefähre Datum des andern Kalenders Δ, das genauer entsprechende Datum des andern Kalenders *D* nennen. Nach dem Gesagten werden die folgenden Regeln klar sein.

Zweite Aufgabe.

Für ein gegebenes *d* im Jüdischen Kalender Δ im Julianischen zu finden.

Man suche aus Taf. I. die Stellenzahl des gegebenen Jahres im Cyclus, suche diese links in Taf. IV. und notire die Zahl unter R. Dazu addire man die Zahl, die in Taf. III. F neben dem gegebenen Monat steht, nebst dem gegebenen Monatstage. Von der Summe subtrahire man die dem gegebenen Jahre angehörige Zahl aus Taf. V., von dem Ueberschufs die nächst kleinere Zahl aus Taf. VI. G: der Rest ist Δ.

Kurz kann man die Regel so ausdrücken:

$$\Delta = E + F + d - V - G.$$

Z. B. den 15. Nisan 5603.

Rest aus Taf. I. 17, dazu	$E =$	253
im Schaltjahr Nisan	$F =$	207
	$d =$	15
		475
	$V =$	17
		458
	$G =$	455 April
	$\Delta =$	3 April.

Nun ist 5603 — 3761 = 1842: in diesem Jahre begann das Jahr 5603; demnach ist vollständig Δ = 1843 3. April.

Dritte Aufgabe.

Für ein gegebenes d im Jüdischen Kalender D im Julianischen zu finden.

Man suche nach der ersten Aufgabe den Wochentag, auf welchen d fällt; nach der zweiten Aufgabe das entsprechende Δ. Dann suche man den Rest, den die Jüdische Jahrzahl von 28 läfst, oben in Taf. VI., addire zu der Zahl, die bei dem in Δ gefundenen Monat steht, das in Δ gefundene Monatsdatum und nehme von dieser Summe den Rest von 7. Dieser Rest zeigt den Wochentag, auf welchen Δ fällt. Ist dieser Wochentag gleich dem zuerst gefundenen, so ist $D = \Delta$. Wenn nicht, so mufs man Δ um einen oder zwei Tage verschieben, so dafs der Wochentag des Julianischen Datums dem des Jüdischen entspricht.

In der ersten und zweiten Aufgabe hatten wir für den 15. Nisan 5603 den Wochentag Sonnabend und Δ = 1843 3. April gefunden. 5603 läfst durch 28 dividirt den Rest 3; dieser giebt in Taf. VI. bei April die Zahl 4; dazu der 3. April (Δ addirt) giebt 7: demnach fällt auch der 3. April 1843 auf Sonnabend; es ist also in diesem Falle $D = \Delta$.

Der Uebersicht wegen gebe ich nun noch ein vollständig durchgeführtes Beispiel. Wann fiel das Passahfest (der 15. Nisan) des Jahres 5602? Aus Taf. I. haben wir

Vertical A . . . . . 5434, Rest 168 }
Horizontal A . . . 152, Rest 16 } $Z = 12$.

$Z=12$ und Rest 16 zeigen in Taf. II. ein Jahr 5 *r*,

5 *r* Nisan aus Taf. III. . . .	6	*E* . . .	264
15. Nisan . . .	15	*F* . . .	177
	21	*d* . . .	15
Rest von 7 . . .	7 Sonnabend		456
5602 durch 28, Rest 2, dazu		*V* . . .	17
März in Taf. VI. . . .	7		439
15 März . . .	15	*G* . . .	424
	22	Δ . . .	15. März 1842.
Rest von 7 . . .	1 Sonntag		

Da nun *d* auf Sonnabend, Δ aber auf Sonntag fällt, so ist $D=\Delta-1=$ 14. März 1842.

Vierte Aufgabe.

Für ein gegebenes *d* im Julianischen Kalender Δ und *D* im Jüdischen zu finden.

Man addire zu der Jahrzahl, wenn das gegebene d vom Januar bis Juli fällt, 3760, wenn es vom October bis December fällt, 3761, und suche aus Taf. I. und II. die Beschaffenheit des Jüdischen Jahres, welches durch diese Summe ausgedrückt wird. Ferner addire man zu der dem gegebenen Monat angehörigen Zahl aus Taf. VI. G das Monatsdatum und die dem Jüdischen Jahre angehörige Zahl aus Taf. V. Mit dem Rest aus Taf. I. gehe man links in Taf. IV. und subtrahire die unter E stehende Zahl von der eben gefundenen Summe; von dem Ueberschusse subtrahire man die nächst kleinere Zahl aus Taf. III. F: der Rest ist Δ. Zu Δ sowohl als zu d suche man den Wochentag und reducire, wenn beide nicht übereinstimmen, Δ auf D. Kurz ausgedrückt ist

$$\Delta = G + d + V - E - F.$$

Z. B. den 5. October 1582 auf den Jüdischen Kalender zu reduciren. 1582 + 3761 = 5343; dazu aus Taf. I.

Vertical *A* . . . . 5187, Rest 156 }
Horizontal *A* . . . 152, Rest 4 } $Z=12$,

G . . .	273	5343 durch 28 giebt den Rest 23; dazu	
d . . .	5	October aus Taf. VI. . . .	1
V . . .	16	5. October . . .	5
	294		6 Freitag.
E . . .	276	Rest 4 und $Z=12$ geben in Taf. II. 2 *u*	
	18	Thischri 2 *u* in Taf. III. . . .	1
F . . .	0	18. Thischri . . .	18
Δ . . .	18. Thischri 5343		19
		Rest von 7 . . .	5 Donnerstag.

Da nun d auf Freitag, Δ aber auf Donnerstag fällt, so ist $D = \Delta + 1 =$ 19. Thischri 5343.

Wenn das gegebene Julianische Datum innerhalb der Grenzen liegt, in welche der Jüdische Jahresanfang fallen kann, also im August, September, oder in den ersten Tagen des October, so kann eine Zweideutigkeit statt finden, ob man 3760 oder 3761 zu der gegebenen Jahrzahl zu addiren habe. Auch führt die eben gegebene Regel in dem Falle zwei Inconvenienzen mit sich, indem nämlich die Summe $G+d+V$ entweder kleiner als E, oder so wenig gröfser ist, dafs ein Datum herauskommt, welches in den Anfang des Jüdischen Jahres fällt, statt dafs es, wenn es noch dem vorigen Jahre angehörte, in die letzten Monate desselben fallen müfste.

Um nun, wenn das gegebene Datum in den erwähnten Grenzen liegt, sicher zu gehen, suche man zunächst den Anfang des Jüdischen Jahres $C+3761$, wobei meistens die Bestimmung von Δ für unsern Zweck hinreicht. Daraus ergiebt sich, ob das gegebene d in das Ende des Jahres $C+3760$, oder in den Anfang des Jahres $C+3761$ fällt. Im ersten Falle addire man zu der Summe $G+d+V$ die Zahl 365, weil wir G nun auf den Anfang des Jahres $C-1$ reduciren müssen, und verfahre im Uebrigen wie vorher. In dem zweiten Falle aber, wenn d schon in das Jahr $C+3761$ fällt, nehme man die Zahl E aus Taf. IV., welche dem letzteren Jahre entspricht.

Suchen wir z. B. Δ im Jüdischen Kalender für den 1. September der Jahre 1842 und 1843. $C+3760$ ist respective 5602 und 5603, $C+3761$ respective 5603 und 5604. Zunächst nun suchen wir den Anfang der beiden letzten Jahre nach der zweiten Aufgabe; wir finden für den 1. Thischri 5603 $\Delta = 25.$ Aug. Demnach fällt der 1. Sept. 1842 bereits in das Jahr 5603. Nun ist

1. Sept. $(G+d)$ . . .	244
V . . .	17
	261
5603, E . . .	253
Δ . . .	8. Thischri 5603.

Dagegen finden wir für den 1. Thischri 5604 $\Delta = 12.$ Sept.; daher fällt der 1. Sept. 1843 noch in das Jahr 5603. Demnach haben wir

$$
\begin{array}{rr}
G+d \ldots & 244 \\
V \ldots & 17 \\
\text{dazu} \ldots & 365 \\
\hline
 & 626 \\
E \ldots & 253 \\
\hline
 & 373 \\
F \ldots & 355 \\
\hline
\Delta \ldots & 18 \text{ Elul } 5603.
\end{array}
$$

Die Regulirung des Δ vermöge der Wochentage bleibt dann wie vorher.

Zum Beschlufs dieser Abhandlung wollen wir den Todestag Christi aufsuchen. Nach der evangelischen Geschichte starb Christus Freitag, zwei Tage vor dem Passahfest, im vier und dreifsigsten Jahre seines Lebens, d. h. am 13. Nisan desjenigen Jüdischen Jahres, welches dem Jahre 34 n. Chr. entspricht; das ist aber das Jahr 3794. Nun haben wir aus Taf. I.

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{Vertical } A \ldots 3705, \text{ Rest } 89 \\
\text{Horizontal } A \ldots \quad 76, \text{ Rest } 13
\end{array}\right\} Z = 43.
$$

Rest 13 und $Z = 43$ geben in Taf. II. ein Jahr $2m$,

$$
\begin{array}{rr}
\text{Nisan } 2m \text{ in Taf. III.} \ldots & 2 \\
13. \text{ Nisan} \ldots & 13 \\
\hline
 & 15 \\
\hline
\text{Rest von } 7 \ldots & 1 \text{ Sonntag.}
\end{array}
$$

Da nun das ganze System der christlichen Festordnung von dem unumstöfslichen Factum ausgeht, dafs Christus zwei Tage vor Ostern und an einem Freitag gestorben, dieser Tag aber im Jahre 34 n. Chr. nicht auf Freitag, sondern auf Sonntag gefallen ist, so folgt daraus mit Evidenz, dafs Christus nicht im Jahre 34 starb. Da er aber eben so sicher im vier und dreifsigsten Jahre seines Lebens gestorben ist, so folgt daraus ferner, dafs unsere Zeitrechnung ein unrichtiges Jahr als das Geburtsjahr Christi voraussetzt. Untersuchen wir nun, in welchem Jahre der 13. Nisan auf Freitag, also der 15. auf Sonntag gefallen ist. Wenn der 15. Nisan auf Sonntag fällt, fällt auch der 1. Nisan auf Sonntag, der vorhergehende Tag also auf Sonnabend. Suchen wir also in Taf. III., bei welchen Jahren in der Reihe Nisan die Zahl 7 steht; so finden wir die Jahre $5u$, $5M$, $7m$. Nun sehen wir in der Reihe 43 der Taf. II., ob eines dieser Zeichen daselbst vorkommt; wir finden $5u$ im ersten und $5M$ im achten Jahre. Da wir vorher das 18. Jahr des Cyclus gefunden hatten, so ist das mit $5M$

bezeichnete achte das nächste Jahr, welches brauchbar ist; es folgt also daraus mit großer Wahrscheinlichkeit, daſs Christus fünf Jahre vor unserer Zeitrechnung geboren ist. Der nächste Cyclus hat die Zahl $Z = 5$, und da hat das zweite Jahr $5u$; demnach ist auch das Jahr 42 n. Chr. als Todesjahr zulässig, welches voraussetzen würde, daſs Christus im Jahre 8 n. Chr. geboren wäre. Halten wir uns aber an das erstgefundene Todesjahr 29, welches das Jüdische Jahr 3789 ist, dem das Zeichen $5M$ und die Stellenzahl 8 zukommt, so haben wir

3789 durch 28 Rest 9,		$E = 262$	
Rest 9 aus Taf. VI. April . . .	5	$F = 207$	
Δ 15. April . . .	15	$d = 13$	
	20	482	
Rest von 7 . . .	6 Freitag.	$V = 12$	
		470	
		$G = 455$	
		Δ = 15 April.	

Demnach ist $\Delta = D = 15$. April des Jahres 29: also fiel Passah auf Sonntag den 17. April.

Die Juden rühmen sich der groſsen Genauigkeit und kunstvollen Anlage ihres neunzehnjährigen Cyclus, in welchem der Wechsel der Gemeinjahre und Schaltjahre so angebracht sein soll, daſs der 15. Nisan, das Passahfest, in allen Fällen auf den ersten Vollmond nach dem Frühlingsäquinoctium falle. Dadurch aber, daſs der neunzehnjährige Cyclus um mehr als zwei Stunden gröſser ist als neunzehn Sonnenjahre, ist es im Laufe der Zeiten bis jetzt dahin gekommen, daſs in den drei Schaltjahren, welche die achte, elfte und neunzehnte Stelle im Cyclus einnehmen, ihr Passahfest nicht auf den ersten, sondern auf den zweiten Vollmond nach dem Aequinoctium fällt, also einen vollen Monat zu spät gefeiert wird. In den genannten Jahren nämlich fällt der 15. Nisan durchschnittlich, wenn man die Ausnahmen nicht berücksichtigt, respective auf den 24., 21. und 23. April Gregor. Styls. Selbst wenn wir statt der circa 29 Tage 12 Stunden, welche den Abstand eines Vollmonds von dem nächsten ausmachen, volle 30 Tage annehmen, und diese von jenem drei Datis zurückzählen, so erhalten wir für die vorhergehenden Vollmonde den 25., 22. und 24. März:

also jedenfalls findet in den drei Jahren zwischen dem Frühlingsäquinoctium und dem Passahfeste noch ein Vollmond statt. Dieser Fehler des Cyclus wird natürlich mit der Zeit immer beträchtlicher; nach etwa 400 Jahren wird auch das Passahfest des dritten Jahres einen Monat zu spät fallen, und nach etwa 1200 Jahren, von jetzt an gerechnet, begegnet dasselbe schon allen Schaltjahren.

Ebenso wenig hat die Bestimmung, nach welcher das christliche Osterfest berechnet wird, wenn dieselbe anders, wie es heifst, den Zweck hatte, das Zusammentreffen dieses Festes mit dem Jüdischen Passah zu verhüten, diesen ihren Zweck erreicht. Zwar, da die allgemeinen Regeln lauten: die Juden feiern ihr Passah am Tage des Vollmonds, die Christen ihre Ostern am Sonntage nach dem Vollmonde, so scheint es, dafs beide Feste nie zusammentreffen können; und sie könnten es in der That nicht, wenn man die wirkliche Beobachtung des Vollmonds der Anordnung des Festes zum Grunde legte. Das thun aber weder die Juden, noch die Christen, sondern die Einen wie die Andern bestimmen das Vollmondsdatum durch cyclische Rechnungen. Aber alle Cyclen weichen mit der Zeit von der Wahrheit ab; und da nun der Jüdische Cyclus, so wie der christliche, jeder seine eigenen Fehler liefert, so ist ein Zusammentreffen beider Feste sehr wohl möglich; und zwar geschieht es in dem Falle, wenn der Jüdische Cyclus den 15. Nisan auf Sonntag verweiset, während die christliche Rechnung schon Sonnabend oder Freitag vorher Vollmond lieferte. Beide Feste trafen z. B. zusammen in dem Jahre 1805 am 14. April und 1825 am 3. April Greg. Styls, nicht aber, wie im Brockhausschen Conversationslexicon (8. Aufl. Art. Ostern.) fälschlich bemerkt wird, auch in den Jahren 1828 und 1832. Denn 1828 fiel das christliche Osterfest, im Jul. wie im Gregor. Kalender, auf den 6. April, das Jüdische auf den 30. März, und 1832 das christliche auf den 22. April, das Jüdische auf den 15. April. Das nächste Zusammentreffen beider Feste wird statthaben in den Jahren 1903 den 12. April, 1923 den 1. April und 1927 den 17. April; in allen drei Jahren aber weicht das Julianische Osterfest von dem Gregorianischen ab, welches letztere eben mit dem Jüdischen zusammenfällt.

In den drei vorher erwähnten Fällen, wenn die Juden ihr Ostern einen Monat zu spät feiern, fällt das christliche Osterfest früher als das Jüdische, das heifst, der Sonntag *nach* dem Vollmonde fällt *früher* als der Vollmond.

Als Anhang gebe ich hier noch einen Vorschlag, beide Kalender mit einander zu vergleichen, eine Methode, die besonders bequem ist, wenn man oft Reductionen innerhalb eines gewissen begrenzten Zeitraums zu machen hat.

Man mache sich auf 14 Täfelchen 14 vollständige Jüdische Kalender für die 14 verschiedenen Jahre, in der Art, dafs man links in einer Verticalspalte die Zahlen von 1 bis 30 hinschreibt, daneben in 12 oder 13 Verticalspalten, welche oben mit den Namen der Monate bezeichnet sind, die Wochentage jedes Datums; die Sonntage numerire man durch das ganze Jahr hindurch, und die ganzen Tafeln bezeichne man oben mit den Definitionszeichen des Jahres.

In ganz ähnlicher Weise verfertige man sich 14 Christliche Kalender, die aber vom 1. September anfangen, und noch den folgenden September, also 13 Monate enthalten; je zwei Tafeln fangen mit demselben Wochentage an, in einer ist aber das mit Januar beginnende Jahr Gemeinjahr, in der andern Schaltjahr. Als Zeichen schreibe man an jede Tafel *G* oder *S*, je nachdem es Gemeinjahr oder Schaltjahr ist, und vor diesen Buchstaben den Wochentag des ersten September. Auch in dieser Tafel gebe man den Sonntagen fortlaufende Nummern.

Weifs man nun für ein gewisses Jahr, auf welches Datum des Christlichen Kalenders der 1. Thischri trifft, so merke man die Zahl des Sonntags, welche dem Datum des 1. Thischri im Christlichen Kalender vorausgeht. Will man nun irgend ein anderes Datum desselben Jüdischen Jahres auf das Christliche reduciren, so suche man es im Jüdischen Kalender auf, addire zu der Sonntagsnummer die Zahl des Sonntags, der dem Datum des 1. Thischri vorangeht, suche diese Summe im Christlichen Kalender, und immer in der Woche den gehörigen Wochentag. Gesetzt also, der 1. Thischri fiele nach dem 3ten Sonntage im Christlichen Kalender und man suchte das Christliche Datum, auf welches der Dienstag nach dem 15. Sonntage des Jüdischen Kalenders trifft, so sucht man nur im Christlichen Kalender den Dienstag nach dem 18. Sonntage.

Da aber die Aufsuchung des 1. Thischri selbst ebensoviele Schwierigkeit macht, als die Aufsuchung irgend eines andern Datums, so hat diese Methode nur Nutzen, wenn man sich für einen gewissen Zeitraum ein für allemal eine Tabelle macht, wie die folgende:

Taf.

5581 1820 7M 1 6G	5600 1839 2U 2 1S	5619 1858 5U 1 4G	5638 1877 7U 1 7G	5657 1896 3R 1 3G	5676 1915 5U 1 4S
5582 1821 5r 4 7G	5601 1840 2m 4 3G	5620 1859 5r 4 5S	5639 1878 7u 4 1G	5658 1897 2u 4 4G	5677 1916 5r 4 6G
5583 1822 2u 3 1G	5602 1841 5r 2 4G	5621 1860 2m 3 7G	5640 1879 5r 2 2S	5659 1898 7m 2 5G	5678 1917 2u 3 7G
5584 1823 7M 0 2S	5603 1842 2U 1 5G	5522 1861 5U 1 1G	5641 1880 2M 1 4G	5660 1899 3R 1 6G	5679 1918 7M 1 1G
5585 1824 5u 3 4G	5604 1843 2u 4 6S	5623 1862 5r 3 2G	5642 1881 7u 3 5G	5661 1900 2u 4 7G	5680 1919 5r 3 2S
5586 1825 3R 2 5G	5605 1844 7M 2 1G	5624 1863 2M 2 3S	5643 1882 5M 2 6G	5662 1901 7M 2 1G	5681 1920 2U 2 4G
5587 1826 2u 5 6G	5606 1845 5r 4 2G	5625 1864 7u 4 5G	5644 1883 3r 5 7S	5663 1902 5u 4 2G	5682 1921 2u 5 5G
5588 1827 7m 3 7S	5607 1846 2u 3 3G	5626 1865 5r 3 6G	5645 1884 7u 2 2G	5664 1903 3r 3 3S	5683 1922 7m 3 6G
5589 1828 3R 1 2G	5608 1847 7M 1 4S	5627 1866 2U 2 7G	5646 1885 5U 1 3G	5665 1904 7U 1 5G	5684 1923 3R 2 7S
5590 1829 2u 4 3G	5609 1848 5r 4 6G	5628 1867 2m 5 1S	5647 1886 5r 4 4G	5666 1905 7u 4 6G	5685 1924 2u 4 2G
5591 1830 7u 2 4G	5610 1849 2u 3 7G	5629 1868 5r 2 3G	5648 1887 2m 3 5S	5667 1906 5r 3 7G	5686 1925 7u 2 3G
5592 1831 5M 1 5S	5611 1850 7U 1 1G	5630 1869 2U 1 4G	5649 1888 5U 1 7G	5668 1907 2M 2 1S	5687 1926 5M 1 4S
5593 1832 3r 4 7G	5612 1851 7m 3 2S	5631 1870 2u 4 5G	5650 1889 5r 4 1G	5669 1908 7u 3 3G	5688 1927 3r 4 5S
5594 1833 7U 2 1G	5613 1852 3R 2 4G	5632 1871 7M 2 6S	5651 1890 2M 2 2G	5670 1909 5M 3 4G	5689 1928 7U 2 7G
5595 1834 7u 4 2G	5614 1853 2u 5 5G	5633 1872 5r 5 1G	5652 1891 7u 4 3S	5671 1910 3r 5 5G	5690 1929 7m 5 1G
5596 1835 5r 3 3S	5615 1854 7u 3 6G	5634 1873 2u 3 2G	5653 1892 5r 3 5G	5672 1911 7u 3 6S	5691 1930 3r 3 2G
5597 1836 2M 2 5G	5616 1855 5M 2 7S	5635 1874 7M 1 3G	5654 1893 2U 2 6G	5673 1912 5U 2 1G	5692 1931 7U 1 3S
5598 1837 7u 4 6G	5617 1856 3r 5 2G	5636 1875 5u 4 4S	5655 1894 2m 5 7G	5674 1913 5r 4 2G	5693 1932 7u 4 5G
5599 1838 5r 3 7G	5618 1857 7u 2 3G	5637 1876 3r 3 6G	5656 1895 5u 3 1S	5675 1914 2m 3 3G	5694 1933 5r 3 6G

Diese Tafel enthält in der obersten Zeile jedes Feldes die fortlaufende Jüdische und die ihr entsprechende Christliche Jahrzahl; unter jeder Jahrzahl steht das auf eine der je 14 Täfelchen hinweisende Zeichen des Jahres; zwischen den beiden Zeichen steht die Zahl, die man zu der Jüdischen Sonntagsnummer zu addiren hat, um die Christliche Sonntagsnummer zu finden. Die Construction dieser Tafel geht sehr leicht und einfach von

Statten und ist kaum weitläufiger, als wenn man einige wenige Data durch Rechnung reduciren mufs. Die Christlichen Zeichen laufen nach einem einfachen Gesetze fort, immer vier auf einander folgende Zahlen; deren drei erste *G*, die letzte *S* hat, dann eine Zahl übersprungen, und wieder vier auf einander folgend u. s. w. Die Jüdischen Zeichen giebt die Taf. II. und die additiven Zahlen findet man ebenfalls sehr leicht, wenn man sich vorher die 14 Tafeln des Christlichen Kalenders construirt hat. Man braucht nur Δ für alle 19 Jahre des Cyclus ein für allemal zu berechnen und dieses in den Christlichen Tafeln aufzusuchen, wozu man selten einmal das Jüdische Zeichen nachzusehen hat, um zu entscheiden, ob der 1. Thischri auf Sonnabend oder Montag fällt. Der Beschaulichkeit wegen setze ich zwei solcher Kalendertäfelchen hieher, und zwar die beiden, die für das folgende Jahr 5604 gehören; der ganze Apparat ist aber auf den Gregor. Kalender berechnet.

2 *u*

	This.	Mar.	Kisl.	Geb.	Schb.	Adar.	Nis.	Jj.	Siv.	Tham.	Ab.	Elul.
1	2	4	6	1 13	2	4	5	7	1 34	3	4	6
2	3	5	7	2	3	5	6	1 30	2	4	5	7
3	4	6	1 9	3	4	6	7	2	3	5	6	1 47
4	5	7	2	4	5	7	1 26	3	4	6	7	2
5	6	1 5	3	5	6	1 22	2	4	5	7	1 43	3
6	7	2	4	6	7	2	3	5	6	1 39	2	4
7	1 1	3	5	7	1 18	3	4	6	7	2	3	5
8	2	4	6	1 14	2	4	5	7	1 35	3	4	6
9	3	5	7	2	3	5	6	1 31	2	4	5	7
10	4	6	1 10	3	4	6	7	2	3	5	6	1 48
11	5	7	2	4	5	7	1 27	3	4	6	7	2
12	6	1 6	3	5	6	1 23	2	4	5	7	1 44	3
13	7	2	4	6	7	2	3	5	6	1 40	2	4
14	1 2	3	5	7	1 19	3	4	6	7	2	3	5
15	2	4	6	1 15	2	4	5	7	1 36	3	4	6
16	3	5	7	2	3	5	6	1 32	2	4	5	7
17	4	6	1 11	3	4	6	7	2	3	5	6	1 49
18	5	7	2	4	5	7	1 28	3	4	6	7	2
19	6	1 7	3	5	6	1 24	2	4	5	7	1 45	3
20	7	2	4	6	7	2	3	5	6	1 41	2	4
21	1 3	3	5	7	1 20	3	4	6	7	2	3	5
22	2	4	6	1 16	2	4	5	7	1 37	3	4	6
23	3	5	7	2	3	5	6	1 33	2	4	5	7
24	4	6	1 12	3	4	6	7	2	3	5	6	1 50
25	5	7	2	4	5	7	1 29	3	4	6	7	2
26	6	1 8	3	5	6	1 25	2	4	5	7	1 46	3
27	7	2	4	6	7	2	3	5	6	1 42	2	4
28	1 4	3	5	7	1 21	3	4	6	7	2	3	5
29	2	4	6	1 17	2	4	5	7	1 38	3	4	6
30	3	5	7	—	3	—	6	—	2	—	5	—

6 *S*

	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.
1	6	1 5	4	6	2	5	6	2	4	7	2	5	1 53
2	7	2	5	7	3	6	7	3	5	1 40	3	6	2
3	1 1	3	6	1 14	4	7	1 27	4	6	2	4	7	3
4	2	4	7	2	5	1 23	2	5	7	3	5	1 49	4
5	3	5	1 10	3	6	2	3	6	1 36	4	6	2	5
6	4	6	2	4	7	3	4	7	2	5	7	3	6
7.	5	7	3	5	1 19	4	5	1 32	3	6	1 45	4	7
8	6	1 6	4	6	2	5	6	2	4	7	2	5	1 54
9	7	2	5	7	3	6	7	3	5	1 41	3	6	2
10	1 2	3	6	1 15	4	7	1 28	4	6	2	4	7	3
11	2	4	7	2	5	1 24	2	5	7	3	5	1 50	4
12	3	5	1 11	3	6	2	3	6	1 37	4	6	2	5
13	4	6	2	4	7	3	4	7	2	5	7	3	6
14	5	7	3	5	1 20	4	5	1 33	3	6	1 46	4	7
15	6	1 7	4	6	2	5	6	2	4	7	2	5	1 55
16	7	2	5	7	3	6	7	3	5	1 42	3	6	2
17	1 3	3	6	1 16	4	7	1 29	4	6	2	4	7	3
18	2	4	7	2	5	1 25	2	5	7	3	5	1 51	4
19	3	5	1 12	3	6	2	3	6	1 38	4	6	2	5
20	4	6	2	4	7	3	4	7	2	5	7	3	6
21	5	7	3	5	1 21	4	5	1 34	3	6	1 47	4	7
22	6	1 8	4	6	2	5	6	2	4	7	2	5	1 56
23	7	2	5	7	3	6	7	3	5	1 43	3	6	2
24	1 4	3	6	1 17	4	7	1 30	4	6	2	4	7	3
25	2	4	7	2	5	1 26	2	5	7	3	5	1 52	4
26	3	5	1 13	3	6	2	3	6	1 39	4	6	2	5
27	4	6	2	4	7	3	4	7	2	5	7	3	6
28	5	7	3	5	1 22	4	5	1 35	3	6	1 48	4	7
29	6	1 9	4	6	2	5	6	2	4	7	2	5	1 57
30	7	2	5	7	3	—	7	3	5	1 44	3	6	2
31	—	3	—	1 18	4	—	1 31	—	6	—	4	7	—

Nun finden wir in Taf. *T.* bei dem Jahre 5604 zwischen den Zeichen 2*u* und 6*S*, zu denen ich die gehörigen Tafeln hieher gesetzt habe, die additive Zahl 4, d. h. das Jahr 5604 beginnt am Montage nach dem vierten Sonntage der Christlichen Tafel, also am 25. September. Suchen wir das Christliche Datum für den 15. Nisan, so sehen wir in der Tafel 2*u*, daſs dieser Tag auf den Donnerstag nach dem 27. Sonntag fällt; daher haben wir ihn in 6*S* an dem Donnerstage nach dem (27 + 4)ten, d. h. nach dem 31. Sonntage zu suchen, und das ist der 4. April. Der letzte Tag des Jahres 5604 ist der Freitag nach dem 50. Sonntage, also im Christlichen Kalender der Freitag nach dem 54. Sonntage, das ist der 13. Sept. Man sieht, daſs die Vergleichung auf diesem Wege ein Spiel ist, wenn man nur einmal die Taf. *T.* hat.

Um Mifsverständnisse zu verhüten, erkläre ich, dafs schon im Jahre 1842 in Königsberg eine kleine Abhandlung erschienen ist, unter dem Titel: *Chronologische Tafeln zur immerwährenden Berechnung des jüdischen Kalenders, von Berl Goldberg aus Neustadt in Polen*, welche die von mir aufgestellten Tafeln I. und II., obgleich in etwas abweichender Form, enthält. Aber beide Tafeln stehen daselbst ganz unerklärt als Dogmen da, und, was in einem solchen Falle besonders übel ist, sie enthalten Fehler, welche natürlich der Leser nicht verbessern kann, weil ihm die Construction der Tafel nicht gelehrt wird. Oefters verweiset die Taf. I. mit falschen Zahlen auf Taf. II., und das kommt nicht selten vor, und auch Taf. II. enthält falsch definirte Jahre. Auch hat letztere Tafel dort die Unbequemlichkeit, dafs die Schaltjahre nicht durch besondere Zeichen unterschieden sind, so dafs man während der Rechnung darauf zu achten hat; was leicht übersehen wird. Unser $2m$ und $2M$ heifst dort A, unser $2u$, $2U$, B u. s. w. Allerdings hat jene Tafel, die mir so lange unerklärlich war, mich zur Aufsuchung ihres Princips angespornt: für den Gedankengang aber, den ich zur Auffindung desselben zu nehmen hatte, hat sie mir nicht den leisesten Wink gegeben, und ich kann trotz jener Schrift die gegenwärtige Abhandlung für mein vollkommenes Eigenthum erklären.

Taf. I.

	C	0 0 0	2 16 595	5 9 110	1 1 705	3 18 220	6 10 815	2 3 330	4 18 925	7 12 440	3 4 1035	5 21 550	1 14 65	4 6 660
B	***A***	0	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228
2 5 204	0	14	36	60	24	47	10	32	54	18	43	5	27	51
2 4 379	247	-	-	59	-	46	-	-	-	-	-	-	-	49
2 3 554	494	-	-	-	21	-	-	-	-	-	41	-	-	-
2 2 729	741	13	-	-	-	-	-	-	52	17	-	4	-	-
2 1 904	988	-	-	-	-	44	-	-	-	-	-	-	-	-
2 0 1079	1235	-	35	-	-	-	-	-	-	15	-	-	-	48
2 0 174	1482	12	-	-	-	-	9	-	-	-	39	-	-	-
1 23 349	1729	-	-	58	20	43	-	31	-	-	-	-	-	-
1 22 524	1976	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-
1 21 699	2213	-	-	-	-	-	7	-	-	-	37	-	-	-
1 20 874	2470	-	34	-	-	-	6	30	-	-	-	-	26	-
1 19 1049	2717	-	-	56	-	-	-	-	-	-	36	61	-	-
1 19 144	2964	-	33	-	-	-	-	29	-	-	-	-	25	-
1 18 319	3211	-	32	-	19	-	5	-	51	-	-	60	24	-
1 17 494	3458	-	-	54	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47
1 16 669	3705	-	-	-	-	-	-	27	-	14	-	59	-	-
1 15 844	3952	-	-	-	18	-	-	-	49	-	-	-	-	46
1 14 1019	4199	-	-	-	-	41	-	-	-	-	-	-	21	-
1 14 114	4446	-	-	-	-	-	-	-	-	13	-	-	-	-
1 13 289	4693	-	-	52	17	-	4	-	-	-	-	-	-	44
1 12 464	4940	-	-	-	15	-	-	-	-	-	35	-	-	-
1 11 639	5187	9	-	-	-	-	-	-	48	12	-	58	-	-
1 10 814	5434	-	-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	20	43
1 9 989	5681	-	31	-	-	-	-	-	-	10	-	-	-	-
1 9 84	5928	7	-	-	-	-	2	-	-	-	34	-	-	-
1 8 259	6175	-	-	-	-	37	-	26	-	-	-	-	-	-
1 7 434	6422	6	30	-	-	-	-	-	-	-	-	56	-	-
1 6 609	6669	-	-	-	-	36	61	-	-	-	32	-	-	-
1 5 784	6916	-	29	-	-	-	60	24	-	-	-	-	19	-
1 4 959	7163	5	-	51	-	-	-	-	-	-	-	54	-	-
1 4 54	7410	-	-	-	-	-	-	-	47	-	-	-	-	-

Taf. II.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2m	5r	2U	2m	5u	3R	2u	7M	5r	2u	7U	7m	3r	7U	7u	5r	2M	7u	5U
2	-	-	-	2U	7m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	5u	3r	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7u	5r	2M	-	-	-	-	-
5	-	5u	3R	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	7U	7m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2U	2m	-
8	2u	7m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	7u	5M	3r	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	7u	5r	2M	-	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2U	2m	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2u	7M
13	-	7u	5M	3r	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	5U	5r	2M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5u	3R	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2U	2m	-	-	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2u	7m	-	-	-
18	3r	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	-	-	5U	5r	2m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5u	3R	-	-	-	-	-
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7U
22	-	-	-	-	-	-	-	2U	2m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2u	7m	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7u	5M	3r	-
25	5r	2m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	2u	7M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5u	3R	-	-	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-	-	-	2u	7m	-	-	-	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7u	5M	3r	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5U	5r	2M
31	-	2u	7M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
32	-	-	-	-	-	-	5u	3R	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
33	-	-	-	-	-	7U	7m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7u	5M	3r	-	-	-	-	-	-	-
35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5U	5r	2m	-	-	-
36	-	-	-	5u	3r	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2U
38	-	-	7U	7m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
39	-	-	-	-	-	-	7u	5M	3r	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5U	5r	2m	-	-	-	-	-	-
41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2u	7M	-	-
42	5u	3r	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
43	-	-	-	7u	5r	2M		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
44	7m	-	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
45	-	-	-	-	-	-		5U	5r	2m	-	-	-	-	-	-	-	-	-
46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2u	7U	-	-	-	-	-
47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5u	3R
48	7u	5r	2M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
49	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7U	7m	-
50	-	-	-	-	-	2U	2m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
51	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2u	7M	-	-	-	-	-	-	-	-
52	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5u	3r	-	-	-
53	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7U	7m	-	-	-	-
54	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7u	5M
55	-	-	2U	2m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
56	-	-	-	-	-	-	2u	7M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
57	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5u	3r	-	-	-	-	-	-
58	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7u	5r	2M	-	-
59	-	-	-	-	5u	3R	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7U	7m	-	-	-	-	-	-	-
61	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5U

Taf. III.

	2m	2u	2M	2U	3r	3R	5r	5u	5M	5U	7m	7u	7M	7U	F Gem.	F Schalt.
Tischri	1	1	1	1	2	2	4	4	4	4	6	6	6	6	0	0
Marschevan	3	3	3	3	4	4	6	6	6	6	1	1	1	1	30	30
Kislev	4	5	4	5	5	5	7	1	7	1	2	3	2	3	59	59
Tebeth	5	7	5	7	7	7	2	3	1	3	3	5	3	5	89	89
Schebat	6	1	6	1	1	1	3	4	2	4	4	6	4	6	118	118
Aiar	1	3	1	3	3	3	5	6	4	6	6	1	6	1	148	148
Ve-Adar	-	-	3	5	-	5	-	-	6	1	-	-	1	3	—	178
Nisan	2	4	4	6	4	6	6	7	7	2	7	2	2	4	177	207
Jjjar	4	6	6	1	6	1	1	2	2	4	2	4	4	6	207	237
Sivan	5	7	7	2	7	2	2	3	3	5	3	5	5	7	236	266
Thamuz	7	2	2	4	2	4	4	5	5	7	5	7	7	2	266	296
Ab	1	3	3	5	3	5	5	6	6	1	6	1	1	3	295	325
Elul	3	5	5	7	5	7	7	1	1	3	1	3	3	5	325	355

Taf. IV.

	D			E
1	0			279
2	4	8	876	268
3	1	17	672	257
4	7	15	181	276
5	4	23	1057	265
6	2	8	853	254
7	1	6	362	273
8	5	15	158	262
9	4	12	747	281
10	1	21	543	270
11	6	6	339	259
12	5	3	928	278
13	2	12	724	267
14	6	21	520	256
15	5	19	29	275
16	3	3	905	264
17	7	12	701	253
18	6	10	210	272
19	3	19	6	261

Taf. V.

315	1
629	2
944	3
1259	4
1573	5
1888	6
2203	7
2517	8
2832	9
3147	10
3461	11
3776	12
4091	13
4405	14
4720	15
5035	16
5349	17
5664	18
5979	19
6293	20
6608	21

Taf. VI.

	0 5 11 — 22	— 6 12 17 23	1 7 — 18 24	2 8 13 19 —	3 — 14 20 25	4 9 15 — 26	— 10 16 21 27	G
August	2	3	4	5	6	7	1	212
September	5	6	7	1	2	3	4	243
October	7	1	2	3	4	5	6	273
November	3	4	5	6	7	1	2	304
December	5	6	7	1	2	3	4	334
Januar	1	2	3	4	5	6	7	365
Februar	4	5	6	7	1	2	3	396
März	4	5	6	7	1	2	3	424
April	7	1	2	3	4	5	6	455
Mai	2	3	4	5	6	7	1	485
Juni	5	6	7	1	2	3	4	516
Juli	7	1	2	3	4	5	6	546
August	3	4	5	6	7	1	2	

Taf. VII.

28	364
56	392
84	420
112	448
140	476
168	504
196	532
224	560
252	588
280	616
308	644
336	672

4.

Ueber die Entwicklung des Ausdrucks

$$[aa-2aa'(\cos\omega\cos\Phi+\sin\omega\sin\Phi\cos(\vartheta-\vartheta'))+a'a']^{-\frac{1}{2}}.$$

(Von Hrn. Professor *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Pr.)

1.

Man kann einen Ausdruck von der Form

$$V=\frac{1}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}$$

durch das bestimmte Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\eta}{A+iB\cos\eta+iC\sin\eta},$$

wo $i=\sqrt{-1}$ ist, darstellen. Setzt man in dieser Formel

$$A=a\cos\omega-a'\cos\Phi,$$
$$B=a\sin\omega\cos\vartheta-a'\sin\Phi\cos\vartheta',$$
$$C=a\sin\omega\sin\vartheta-a'\sin\Phi\sin\vartheta',$$

so erhält man den zur Entwicklung vorgelegten Ausdruck durch das bestimmte Integral

$$V=\frac{1}{\sqrt{[(aa-2aa'(\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta-\vartheta'))+a'a']}}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\eta}{a(\cos\omega+i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta))-a'(\cos\varphi+i\sin\varphi\cos(\vartheta'-\eta))}$$

ausgedrückt. Es wird daher, wenn man

$$V=\frac{Y_0}{a}+Y_1\frac{a'}{a^2}+Y_2\frac{a'^2}{a^3}+\text{etc.}$$

setzt, das allgemeine Glied der Entwicklung Y_n durch das bestimmte Integral

$$Y_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[\cos\varphi+i\sin\varphi\cos(\vartheta'-\eta)]^n d\eta}{[\cos\omega+\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{n+1}}$$

gegeben. Setzt man

$$[\cos\Phi+i\sin\Phi\cos(\vartheta'-\eta)]^n=X_n+2iX'_n\cos(\vartheta'-\eta)-2X''_n\cos2(\vartheta'-\eta)\text{ etc.}$$
$$[\cos\omega+i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{-(n+1)}=P_n+2iP'_n\cos(\vartheta-\eta)-2P''_n\cos2(\vartheta-\eta)\text{ etc.},$$

so giebt die vorstehende Formel:

$$Y_n=P_nX_n-2P'_nX'_n\cos(\vartheta-\vartheta')+2P''_nX''_n\cos2(\vartheta-\vartheta')\text{ etc.}$$

Die Gröfsen P_n, P'_n etc. hängen nur von ω, die Gröfsen X_n, X'_n etc. nur

von $\varPhi$ ab. Sie müssen ferner dieselben Functionen respective von ω und $\varPhi$, oder nur um einen Zahlenfactor verschieden sein, da V und also auch Y_n ungeändert bleibt, wenn man $\varPhi$ und ω mit einander vertauscht.

Setzt man $\omega = 0$, so erhält man aus dem Vorigen:

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\varPhi + i\sin\varPhi\cos(\vartheta'-\eta)]^n d\eta = X_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(aa-2aa'\cos\varphi+a'a')}} = \frac{X_0}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + X_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.}$$

Setzt man $\varPhi = 0$, so erhält man

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{-(n+1)} d\eta = P_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(aa-2aa'\cos\omega+a'a')}} = \frac{P_0}{a} + P_1\frac{a'}{a^2} + P_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.},$$

wo die ersten Coëfficienten $X_0 = P_0 = 1$ werden, wie sich ergiebt, wenn man $a = 0$ setzt. In den beiden Integralen, durch welche X_n und P_n bestimmt werden, kann man für $\vartheta'-\eta$, $\vartheta-\eta$ blofs η schreiben. Da die beiden Radicale gleich werden, wenn man $\varPhi = \omega$ setzt, so folgt, dafs P_n und X_n genau dieselben Functionen respective von ω und $\varPhi$ sind.

Die im Vorhergehenden bewiesenen Formeln geben folgenden Satz:

„Wenn $\frac{1}{\sqrt{(aa-2aa'\cos\varphi+a'a')}} = \frac{1}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + X_2\frac{a'^2}{a^3}$ etc., und P_n dieselbe Function von ω wie X_n von $\varPhi$ ist, so hat man

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{[aa-2aa'(\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta-\vartheta'))+a'a']}}$$

$$= \frac{1}{a} + P_1X_1\frac{a'}{a^2} + P_2X_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.}"$$

Dieses schöne, von *Legendre* gefundene Resultat und die Anwendungen, die er davon gemacht, haben den Anstofs zu *Laplace's* tiefsinnigen Untersuchungen über die Entwicklung der Functionen zweier Winkel gegeben.

2.

Die Ausdrücke von X_n, X'_n etc., P_n, P'_n etc. findet man mit Hülfe des *Taylor*schen Lehrsatzes und einer häufig anwendbaren Ausdehnung desselben auf Entwicklungen, welche nicht blofs die ganzen positiven Potenzen des Increments enthalten. Setzt man nämlich

$$\cos\varPhi = x, \quad i\sin\varPhi e^{i\eta} = z,$$

so hat man die merkwürdige Gleichung



$$2z[\cos\Phi+i\sin\Phi\cos\eta] = z[2\cos\Phi+i\sin\Phi e^{i\eta}+i\sin\Phi e^{-i\eta}]$$
$$= 2xz+zz-\sin^2\Phi = (x+z)^2-1,$$

und daher

$$[(x+z)^2-1]^n = 2^n z^n[\cos\Phi+i\sin\Phi\cos\eta]^n$$
$$= 2^n z^n [X_n + iX'_n e^{i\eta} - X''_n e^{2i\eta} - iX'''_n e^{3i\eta} \text{ etc.}$$
$$+ iX'_n e^{-i\eta} - X''_n e^{-2i\eta} - iX'''_n e^{-3i\eta} \text{ etc.}]$$
$$= 2^n z^n \Big[X_n + X'_n \frac{z}{\sin\varphi} + X''_n \frac{z^2}{\sin^2\varphi} + X'''_n \frac{z^3}{\sin^3\varphi} \text{ etc.}$$
$$- X'_n \sin\Phi . z^{-1} + X''_n \sin^2\Phi . z^{-2} - X'''_n \sin^3\Phi . z^{-3} \text{ etc.}\Big].$$

Hier ist $X_n^{(m)}$ in die beiden Ausdrücke

$$\frac{2^n}{\sin^m\varphi} z^{n+m} \quad \text{und} \quad (-1)^m 2^n \sin^m\Phi\, z^{n-m}$$

multiplicirt. Nach dem *Taylor*schen Lehrsatze sind aber die Coëfficienten von z^{n+m} und z^{n-m} in der Entwicklung von $[(x+z)^2-1]^n$:

$$\frac{d^{n+m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n+m).dx^{n+m}}, \quad \frac{d^{n-m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n-m).dx^{n-m}};$$

wo $\Pi k = 1.2\ldots.k$. Man hat daher für $X_n^{(m)}$ die beiden Ausdrücke

$$X_n^{(m)} = \frac{\sin^m\varphi}{2^n}.\frac{d^{n+m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n+m).dx^{n+m}} = \frac{(-1)^m}{2^n\sin^m\varphi}.\frac{d^{n-m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n-m).dx^{n-m}}.$$

Für $m=0$ geben beide

$$X_n = \frac{d^n.(x^2-1)^n}{2^n\Pi n.dx^n}.$$

Man kann daher für den ersten der beiden Ausdrücke von $X_n^{(m)}$ setzen:

$$X_n^{(m)} = \frac{\Pi n}{\Pi(n+m)}.(1-xx)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m X_n}{dx^m}.$$

Führt man, um den Ausdruck von $P_n^{(m)}$ zu finden, die ähnlichen Bezeichnungen

$$\cos\omega = p \quad \text{und} \quad i\sin\omega e^{i\eta} = z$$

ein, so erhält man wieder

$$[(p+z)^2-1]^{-(n+1)} = (2z)^{-(n+1)}[\cos\omega+i\sin\omega\cos\eta]^{-(n+1)}$$
$$= (2z)^{-(n+1)}\Big[P_n + P'_n\frac{z}{\sin\omega} + P''_n\frac{z^2}{\sin^2\omega} + P'''_n\frac{z^3}{\sin^3\omega} \text{ etc.}$$
$$- P'_n\sin\omega.z^{-1} + P''_n\sin^2\omega.z^{-2} - P'''_n\sin^3\omega.z^{-3} \text{ etc.}\Big].$$

Die Coëfficienten von $z^{-(n+1-m)}$, $z^{-(n+1+m)}$ werden hier

$$\frac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\omega}.P_n^{(m)}, \quad (-1)^m 2^{-(n+1)}\sin^m\omega.P_n^{(m)}.$$

Um die Coëfficienten derselben Potenzen von z aus der Entwicklung von $[(p+z)^2-1]^{-(n+1)}$ zu erhalten, bemerke ich, dafs man dasselbe Prinzip,

welches die *Taylorsche* Reihe giebt, dafs nämlich die nach p und z genommenen partiellen Differentialquotienten einer Function von $p+z$ einander gleich sind, auch mit Vortheil auf Entwicklungen anwenden kann, welche, wie die hier vorliegenden, positive und negative Potenzen von z in's Unendliche enthalten. Ist u_k der Coëfficient von z^k, so wird der Coëfficient von z^{k+m}, je nachdem k positiv oder negativ ist,

$$\frac{\Pi k}{\Pi(k+m)}\cdot\frac{d^m u_k}{dp^m} \text{ oder } \frac{(-1)^m\Pi(-k-m-1)}{\Pi(-k-1)}\cdot\frac{d^m u_k}{dp^m}$$

und der Coëfficient von z^{k-m}

$$\frac{\Pi k}{\Pi(k-m)}\int^m u_k\,dp^m \text{ oder } (-1)^m\frac{\Pi(-k+m-1)}{\Pi(-k-1)}\cdot\int^m u_k\,dp^m.$$

Nun kann man der Natur der Sache nach keinen Uebergang von den ganzen positiven zu den ganzen negativen Potenzen von z machen, und umgekehrt. Denn da in der Entwicklung kein Logarithmus von z vorkommt, so kann auch das nach z genommene Differential nicht den Term $\frac{1}{z}$ enthalten. Es kann daher auch das ihm gleiche partielle Differential nach p nicht den Term $\frac{1}{z}$ enthalten, oder: *der Coëfficient von $\frac{1}{z}$ in einer von* $\log z$ *freien Entwicklung einer Function von $p+z$ ist immer eine Constante.* Hieraus folgt allgemein, dafs der Coëfficient von $z^{-(1+k)}$ eine ganze rationale Function von p von der $k$ten Ordnung ist.

In dem vorliegenden Problem ist P_n und daher der Coëfficient von $z^{-(n+1)}$ gegeben. Denn da P_n dieselbe Function von p wie X_n von X ist, so hat man auch

$$P_n = \frac{d^n.(p^2-1)^n}{2^n\Pi n.dp^n}.$$

Da $2^{-(n+1)}P_n$ der Coëfficient von $z^{-(n+1)}$ ist, so wird nach dem Vorhergehenden, wenn man $k=-n-1$ setzt, der Coëfficient von $z^{-(n+1)+m}$

$$(-1)^m 2^{-(n+1)}\frac{\Pi(n-m)}{\Pi n}\cdot\frac{d^m P_n}{dp^m}$$

und der Coëfficient von $z^{-(n+1)-m}$

$$(-1)^m 2^{-(n+1)}\frac{\Pi(n+m)}{\Pi n}\int^m P_n\,dp^m,$$

wo die nach einander zu bildenden Integrale für $p=\pm1$ verschwinden müssen, da für $p=\pm1$ die zu entwickelnde Function $z^{-(n+1)}=(\pm z)^{-(n+1)}$ wird, deren Entwicklung keine höheren negativen Potenzen als die $-(n+1)$te enthält. Man hat daher für $P_n^{(m)}$ die beiden Ausdrücke

$$P_n^{(m)} = (-1)^m \frac{\Pi(n-m)}{\Pi n} \sin^m \omega \frac{d^m P_n}{dp^m}$$
$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi n} \cdot \frac{1}{\sin^m \omega} \int^m P_n \, dp^m.$$

Vergleicht man die für $P_n^{(m)}$ und $X_n^{(m)}$ gefundenen Ausdrücke, so sieht man, dafs man $P_n^{(m)}$ aus $X_n^{(m)}$ erhält, wenn man p für x setzt und mit

$$(-1)^m \frac{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}{\Pi n\,\Pi n}$$

multiplicirt. Man hat daher zwischen den bestimmten Integralen, durch welche man $X_n^{(m)}$ und $P_n^{(m)}$ ausdrücken kann, die Relation

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos m\eta\, d\eta}{[\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta]^{n+1}}$$
$$= (-1)^m \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi n\,\Pi n} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta]^n \cos m\eta\, d\eta$$
$$= (-i)^m\, 2^{-(n+1)} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi n} \sin^m\omega \frac{d^{n+m}.(pp-1)^n}{dp^{n+m}},$$

wo $p = \cos\omega$ und $m \leqq n$. Einer meiner jüngeren Freunde, Herr Dr. *Heyne*, hat bemerkt, dafs die hier zwischen den bestimmten Integralen gefundene Relation in der *Euler*schen Formel

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx\, dx}{[aa+2ab\cos x+bb]^{n+1}}$$
$$= (-1)^m \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi n\,\Pi n} \cdot \frac{1}{(aa-bb)^{2n+1}} \int_0^\pi [aa+2ab\cos x+bb]^n \cos mx\, dx$$

enthalten ist, wenn man $a = \cos\frac{1}{2}\Phi$, $b = i\sin\frac{1}{2}\Phi$ setzt.

Substituirt man die für $X_n^{(m)}$, $P_n^{(m)}$ gefundenen Werthe

$$X_n^{(m)} = \frac{\Pi n.\sin^m\varphi}{\Pi(n+m)} \cdot \frac{d^m X_n}{dx^m},$$
$$P_n^{(m)} = (-1)^m \frac{\Pi(n-m)\sin^m\omega}{\Pi n} \cdot \frac{d^m P_n}{dp^m}$$

in den für Y_n gefundenen Ausdruck

$$Y_n = P_n X_n - 2P_n' X_n' \cos(\vartheta-\vartheta') + 2P_n'' X_n'' \cos 2(\vartheta-\vartheta') - \text{etc.},$$

so erhält man

$$Y_n = P_n X_n + \frac{2\Pi(n-1)\sin\omega\sin\varphi}{\Pi(n+1)} \cdot \frac{dP_n}{dp} \cdot \frac{dX_n}{dx} \cos(\vartheta-\vartheta$$
$$+ \frac{2\Pi(n-2)\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\Pi(n+2)} \cdot \frac{d^2P_n}{dp^2} \cdot \frac{d^2X_n}{dx^2} \cos 2(\vartheta-\vartheta') + \text{etc.},$$

welches die von *Laplace* auf ganz verschiedenem Wege gefundene Reihe ist.

Wir fanden allgemein für den Coëfficienten von z^{-n-1-m} in der Entwicklung von $[(z+p)^2-1]^{-n-1}$:

$$(-1)^m 2^{-n-1}\sin^m\omega . P_n^{(m)} = \frac{(-1)^m \Pi(n+m)}{2^{n+1}\Pi n}\int^m P_n dp^m.$$

Setzt man für P_n seinen Werth, so kann man denselben, wenn $m>n$, so darstellen:

$$\frac{(-\sin\omega)^m P_n^{(m)}}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^m \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\Pi n\,\Pi n}\int^{m-n}(pp-1)^n . dp^{m-n}.$$

Der Coëfficient von z^{-n-1+m} war

$$\frac{P_n^{(m)}}{2^{n+1}\sin^m\omega};$$

er findet sich daher durch die vorstehende Gleichung:

$$\frac{(-1)^m \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\Pi n\,\Pi n}\cdot\frac{1}{(pp-1)^m}\int^{m-n}(pp-1)^n dp^{m-n}.$$

Diese Formel giebt die Coëfficienten aller positiven Potenzen von z in der vorgelegten Entwicklung. Setzt man in derselben $m=n+1$, so erhält man den von z freien Term

$$\frac{P_n^{(n+1)}}{2^{n+1}\sin^{n+1}\omega} = \frac{(-1)^{n+1}\Pi(2n+1)}{2^{2n+1}.\Pi n\,\Pi n}\cdot\frac{1}{(pp-1)^{n+1}}\int(pp-1)^n dp.$$

Aber durch dieselbe Betrachtung, welche die *Taylor*sche Reihe giebt, findet man auch hier den Coëfficienten der positiven Potenz z^{m-n-1}, wenn man den von z freien Term $m-n-1$ mal nach p differenziirt und durch $\Pi(m-n-1)$ dividirt. Man erhält daher für diesen Coëfficienten, wenn $m>n+1$, den doppelten Ausdruck

$$\frac{P_n^{(m)}}{2^{n+1}\sin^m\omega} = \frac{(-1)^m \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\Pi n\,\Pi n}\cdot\frac{1}{(pp-1)^m}\int^{m-n}(pp-1)^n dp^{m-n}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}\Pi(2n+1)}{2^{2n+1}\Pi n\,\Pi n\,\Pi(m-n-1)}\cdot\frac{d^{m-n-1}.[(pp-1)^{-n-1}\int(pp-1)^n dp]}{dp^{m-n-1}}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Formen ergiebt die Gleichung

$$\int^{m-n}(pp-1)^n dp^{m-n} =$$
$$(-1)^{m-n-1}\frac{\Pi(2n+1).(pp-1)^m}{\Pi(n+m)\Pi(n-m-1)}\cdot\frac{d^{m-n-1}.[(pp-1)^{-n-1}\int(pp-1)^n dp]}{dp^{m-n-1}}.$$

Um ein convergirende Entwicklung zu erhalten, mufs man die beiden Factoren des vorgelegten Ausdrucks

$$\frac{1}{[(z+p)^2-1]^{n+1}} = \frac{1}{(p+1+z)^{n+1}}\cdot\frac{1}{(z+p-1)^{n+1}},$$

den ersten nach aufsteigenden, den zweiten nach absteigenden Potenzen von x entwickeln, wenn p zwischen 0 und 1 liegt, und umgekehrt, wenn p sich zwischen 0 und -1 befindet. So lange p in den angegebenen Intervallen bleibt, bleibt auch die Entwicklung dieselbe. Da nun für $p=+1$ und für $p=-1$ keine höhern negativen Potenzen als die $-(n+1)$te in der Entwicklung vorkommen, so hat man in den für $P_n^{(m)}$ angegebenen Werthen die Integrale so zu nehmen, dafs sie für $p=1$ oder für $p=-1$ verschwinden, je nachdem p positiv oder negativ ist. Wenn $m \leqq n$, werden beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt.

Königsberg am 29. Mai 1843.

5.

Ueber die Coëfficienten der Secantenreihe.

(Vom Herrn Dr. *Stern* in Göttingen.)

In dem vierten Bande dieses Journals (S. 299) hat Herr Prof. *Scherk* einen Ausdruck mitgetheilt, welcher die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellt. Da meines Wissens sonst Nichts über diesen Gegenstand bekannt ist, so möchte vielleicht folgende Notiz nicht ganz ohne Interesse sein. Wie in dem erwähnten Aufsatze, soll auch hier $\overset{2n-1}{B}$ die $n$te Bernoullische Zahl und $\overset{2n}{B}$ den $n$ten Secantencoëfficienten bezeichnen.

Aus der bekannten Formel *)

$$\cos\frac{x\pi}{2n}+\text{tang}\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{x\pi}{2n}=\Big(1+\frac{x}{n-m}\Big)\Big(1-\frac{x}{n+m}\Big)\Big(1+\frac{x}{3n-m}\Big)\Big(1-\frac{x}{3n+m}\Big)\dots$$

ergiebt sich, wenn man $n=2$, $m=1$ und $x\pi=u$ setzt,

$$\cos\tfrac{1}{4}u+\sin\tfrac{1}{4}u=(1+x)(1-\tfrac{1}{3}x)(1+\tfrac{1}{5}x)(1-\tfrac{1}{7}x)\dots$$
$$=1+\frac{u}{4}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{u^2}{4^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{u^3}{4^3}\dots$$

Bezeichnet man in der letzten Reihe den Coëfficienten von u^n durch A_n und durch $\overline{\tfrac{1}{2}n}$ die gröfste in dem Bruche $\tfrac{1}{2}n$ enthaltene ganze Zahl, so ist

$$A_n=(-1)^{\overline{\frac{1}{2}n}}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$$

und

$$(1+A_1u+A_2u^2+\dots)=(1+x)(1-\tfrac{1}{3}x)(1+\tfrac{1}{5}x)(1-\tfrac{1}{7}x)\dots$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen und bemerkt dafs

$$\frac{2^{2n}-1}{2}\cdot\frac{\pi^{2n}}{2n!}\overset{2n-1}{B}=1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}\dots,$$

$$\frac{2n+1}{2^{2n+2}}\cdot\frac{\pi^{2n+1}}{2n+1!}\overset{2n}{B}=1-\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}\dots$$

ist, wo man, um die zweite Formel allgemein zu machen, $\overset{0}{B}=1$ setzt,

---

*) *Euler* introd. in an. inf. §. 171.

so hat man

$$\log(1+A_1u+A_2u^2\ldots\ldots)$$

$$=\frac{1}{2^2}\overset{0}{B}u-\frac{1}{2}.\frac{2^2-1}{2}.\frac{1}{2!}\overset{1}{B}u^2\ldots\ldots-\frac{1}{2n}.\frac{2^{2n}-1}{2}.\frac{\overset{2n-1}{B}}{2n!}u^{2n}+\frac{1}{2^{2n+2}}.\frac{\overset{2n}{B}}{2n+1!}u^{2n+1}\ldots\ldots$$

In dieser Entwicklung ist also der Coëfficient von u^n, welcher a_n heifsen mag,

$$\text{entweder} \;=\; -\frac{1}{n}.\frac{2^n-1}{2}.\frac{\overset{n-1}{B}}{n!},$$

$$\text{oder} \;=\; \frac{1}{2^{n+1}}.\frac{\overset{n-1}{B}}{n!},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Bezeichnet man durch k_n einen Ausdruck, welcher $=0$ oder $=1$ wird, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist (z. B. $k_n=\frac{1}{2}(1+(-1)^n)$), so kann man diese zwei Fälle in einen zusammen ziehen und hat

$$a_n=\frac{1-k_n.2^n}{2^n-k_n(2^n-n)}.\frac{1}{2}.\frac{\overset{n-1}{B}}{n!}.$$

Vermittelst der bekannten Relation, dafs, wenn

$$\text{tang}(1+A_1u+A_2u^2\ldots\ldots)=a_1u+a_2u^2\ldots\ldots,$$

auch

$$nA_n=na_n+n-1.a_{n-1}A_1+\ldots\ldots+a_1A_{n-1}$$

ist, ergiebt sich daher, wenn man die früher entwickelten Werthe der A und a substituirt,

$$1.\quad (-1)^{\overline{\frac{1}{2}n}}.\frac{1}{2^{2n-1}}.\frac{1}{n-1!}$$

$$=\frac{1-k_n.2^n}{2^n-k_n(2^n-n)}.\frac{\overset{n-1}{B}}{n-1!}+\frac{1-k_{n-1}.2^{n-1}}{2^{n-1}-k_{n-1}(2^{n-1}-(n-1))}.\frac{\overset{n-2}{B}}{n-2!}.(-1)^{\overline{\frac{1}{2}}}.\frac{1}{2^2}.\frac{1}{1!}+\ldots$$

$$\ldots\frac{1}{2^2}.(-1)^{\overline{\frac{1}{2}(n-1)}}.\frac{1}{2^{2n-3}}.\frac{1}{n-1!},$$

also eine Recursionsformel, welche alle Bernoullischen Zahlen und alle Secantencoëfficienten angiebt.

Man kann diese Formel auf folgende Weise noch etwas kürzer ausdrücken:

$$2.\quad (-k_n)^{\frac{1}{2}n}.\frac{1}{2^{2n-2}}.\frac{1}{n-1!}$$

$$=\frac{1-k_n.2^n}{2^n-k_n(2^n-n)}.\frac{\overset{n-1}{B}}{n-1!}+\frac{1-k_{n-1}.2^{n-1}}{2^{n-1}-k_{n-1}(2^{n-1}-(n-1))}.\frac{\overset{n-2}{B}}{n-2!}.(-1)^{\overline{\frac{1}{2}}}.\frac{1}{2^2}.\frac{1}{1!}\ldots$$

$$\ldots+\frac{1-2^2}{2}.\frac{\overset{1}{B}}{1!}.(-1)^{\overline{\frac{1}{2}(n-2)}}.\frac{1}{2^{2n-4}}.\frac{1}{n-2!}.$$

An die Formel (1.) schliefst sich eine unabhängige combinatorische Formel. Es ist nemlich

$$3.\quad \frac{1-k_n.2^n}{2^n-k(2^n-n)}.\frac{1}{2}.\frac{\overset{n-1}{B}}{n!} = \sum_{1,n}^{h}(-1)^{h-1}.\frac{1}{h}\,{}^n_p\overset{h}{C'}\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2!}.\frac{1}{4^2}\dots\right),$$

wo ${}^n_p\overset{h}{C'}\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2!}.\frac{1}{4^2}\dots\right)$ die Combinationen mit Wiederholung der Classe h zur Summe n aus den Gröfsen $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2!}.\frac{1}{4^2}\dots(-1)^{\overline{1n}}.\frac{1}{2^{2n}}.\frac{1}{n!}$ als Elemente genommen, jede Gruppe mit der entsprechenden Permutationszahl multiplicirt, bedeutet, und die Elemente durch Multiplication verbunden sind.

Eine andere Recursionsformel findet man durch folgende Betrachtung. Aus

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2.\pi^2}\right)\dots$$

folgt, wenn man $x^2=u$ setzt,

$$\log\left(1-\frac{u}{2!}+\frac{u^2}{4!}-\frac{u^3}{6!}\dots\right)$$

$$= -2.\frac{2^2-1}{2!}\overset{1}{B}.u-\frac{1}{2}.2^3.\frac{2^4-1}{4!}\overset{3}{B}.u^2\dots-\frac{1}{n}.2^{2n-1}.\frac{2^{2n}-1}{2n!}\overset{2n-1}{B}.u\dots,$$

mithin

$$4.\quad (-1)^n.\frac{n}{2n!} = -2^{2n-1}.\frac{2^{2n}-1}{2n!}\overset{2n-1}{B}+2^{2n-3}.\frac{2^{2n-2}-1}{2n-2!}.\frac{1}{2!}\overset{2n-3}{B}$$
$$-2^{2n-5}.\frac{2^{2n-4}-1}{2n-4!}.\frac{1}{4!}\overset{2n-5}{B}\dots+(-1)^n.2.\frac{2^2-1}{2!}.\frac{1}{2n-2!}\overset{1}{B}$$

oder

$$2^{2n-1}(2^{2n}-1)\overset{2n-1}{B}-2^{2n-3}(2^{2n-2}-1).\frac{2n.2n-1}{2!}\overset{2n-3}{B}$$
$$+2^{2n-5}(2^{2n-4}-1).\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{4!}\overset{2n-5}{B}\dots+(-1)^n.n=0.$$

Diese Relation zwischen den Bernoullischen Zahlen habe ich nirgendwo gefunden. An dieselbe schliefst sich folgende unabhängige Bildung der Bernoullischen Zahlen, nemlich

$$5.\quad \frac{1}{n}.2^{2n-1}.\frac{2^{2n}-1}{2n!}\overset{2n-1}{B} = \sum_{1,n}^{h}(-1)^h.\frac{1}{h}\,{}^n_p\overset{h}{C'}\left(-\frac{1}{2!},\frac{1}{4!},-\frac{1}{6!}\dots\right).$$

Nun ist

$$\sec x = 1+\frac{\overset{2}{B}}{2!}u+\dots+\frac{\overset{2n}{B}}{2n!}u^n\dots,$$

also, da $\log\sec x = -\log\cos x$,

$$\log\left(1+\frac{\overset{2}{B}}{2!}u+\ldots\right)$$
$$=2.\frac{2^2-1}{2!}\overset{1}{B}.u+\frac{1}{2}.2^3.\frac{2^4-1}{4!}\overset{3}{B}.u^2\ldots+\frac{1}{n}.2^{2n-1}.\frac{2^{2n}-1}{2n!}\overset{2n-1}{B}.u^n\ldots$$

und

$$6.\quad n.\frac{\overset{2n}{B}}{2n!}=2^{2n-1}.\frac{2^{2n}-1}{2n!}\overset{2n-1}{B}+2^{2n-3}.\frac{2^{2n-2}-1}{2n-2!}\overset{2n-3}{B}.\frac{\overset{2}{B}}{2!}\ldots+2.\frac{2^2-1}{2!}\overset{1}{B}.\frac{\overset{2n-2}{B}}{2n-2!},$$

welches die erwähnte Recursionsformel ist.

Setzt man die Secantencoëfficienten als bekannt voraus, so ergiebt sich aus denselben jede Bernoullische Zahl durch die Formel

$$7.\quad \frac{1}{n}.2^{2n-1}.\frac{2^{2n}-1}{2n!}\overset{2n-1}{B}=\sum_{1,n}^{h}(-1)^{h-1}.{}^{n}_{\flat}\overset{h}{C}'\left(\frac{\overset{2}{B}}{2!},\frac{\overset{4}{B}}{4!}\ldots\right).$$

Setzt man die Bernoullischen Zahlen als bekannt voraus, so findet man die Secantencoëfficienten durch die Formel

$$8.\quad \frac{\overset{2n}{B}}{2n!}=\sum_{1,n}^{h}\frac{{}^{n}_{\flat}\overset{h}{C}\left(2.\frac{2^2-1}{2!}\overset{1}{B},\ldots,\frac{1}{n}.2^{2n-1}.\frac{2^{2n}-1}{2n!}\overset{2n-1}{B}\ldots\right)}{h!}.$$

Behandelt man auf ähnliche Weise die Formel

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots,$$

so findet man neben der bekannten Relation

$$\frac{2^{2n-1}.\overset{2n-1}{B}}{2n!}-\frac{2^{2n-3}.\overset{2n-3}{B}}{2n-2!}.\frac{1}{3!}\ldots\pm\frac{n}{2n+1!}=0$$

auch die unabhängige Bildungsformel

$$9.\quad \frac{1}{n}.\frac{2^{2n-1}.\overset{2n-1}{B}}{2n!}=\sum_{1,n}^{h}(-1)^h.\frac{1}{h}.{}^{n}_{\flat}\overset{h}{C}'\left(-\frac{1}{3!},\frac{1}{5!}\ldots\right).$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel (5.), so ergiebt sich der merkwürdige combinatorische Satz

$$10.\quad 2^{2n}-1=\frac{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h.\frac{1}{h}.{}^{n}_{\flat}\overset{h}{C}'\left(-\frac{1}{2!},\frac{1}{4!}\ldots\right)}{\sum_{1,n}^{h}(-1)^h.\frac{1}{h}.{}^{n}_{\flat}\overset{h}{C}'\left(-\frac{1}{3!},\frac{1}{5!}\ldots\right)}.$$

6.

Ueber die Verallgemeinerung des pythagoräischen Lehrsatzes.

(Vom Hrn. Professor *Umpfenbach* zu Giefsen.)

Die Verallgemeinerung des pythagoräischen Lehrsatzes liefse sich so aussprechen:

In allen Dreiecken, deren einer Winkel $= A$, ist die nte Potenz der gegenüberstehenden Seite gleich der Summe der nten Potenzen der beiden andern Seiten.

Es sei ein zweiter Winkel des Dreiecks $= x$, so ist der dritte $= 180^0 - (A + x)$. Da sich nun in dem Ausspruche des Satzes die Seiten ersetzen lassen durch die Sinus der gegenüberstehenden Winkel, welchen sie proportional sind, so soll demzufolge

$$\sin x^n + \sin(A + x)^n = \sin A^n$$

sein. Der Satz mufs auch gültig sein für den Winkel $x + \partial x$, bei ungeändertem Werthe von A. Es ist also

$$n \sin x^{n-1} \cos x + n \sin(A + x)^{n-1} \cos(A + x) = 0.$$

Der Satz mufs auch gültig sein für den Winkel $x + 2\partial x$, es ist also auch

$$n(n-1) \sin x^{n-2} \cos x^2 + n(n-2) \sin(A + x)^{n-2} \cos(A + x)^2$$
$$- n \sin x^n - n \sin(A + x)^n = 0.$$

Substituiren wir $\cos x^2 = 1 - \sin x^2$, $\cos(A + x)^2 = 1 - \sin(A + x)^2$, so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$(n-1) \sin x^{n-2} + (n-1) \sin(A + x)^{n-2} = n \sin A^n.$$

Soll nun diese Gleichung richtig sein, der Werth von x mag sein, was man wolle, so müssen sich die Theilsätze heben, welche x enthalten; dieses wird aber nur eintreten, wenn $n - 2 = 0$, also $n = 2$: die Gleichung wird dann

$$(2-1) + (2-1) = 2 \sin A^n,$$

daher $\sin A^n = 1$, $\sin A = 1$, folglich $A = 90^0$. Der pythagoräische Lehrsatz ist demnach keiner Verallgemeinerung fähig.

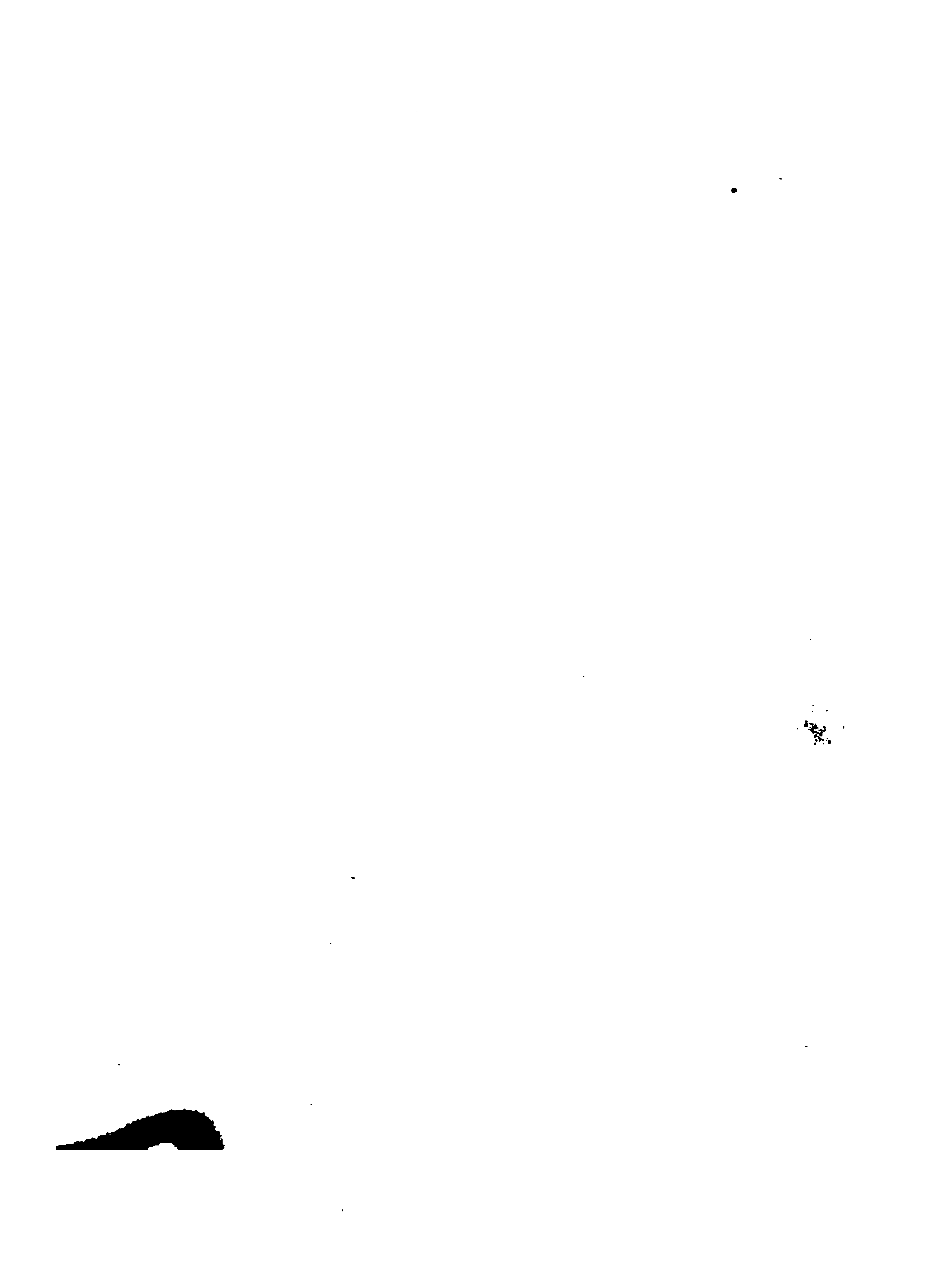
Crelle, Journal d. Math. Bd XXVII Heft 1.

Facsimile einer Handschrift von Johann Bernoulli

Viro Clarissimo ac Mathematico longe acutissimo
Leonhardo Eulero
S. P. D.
Joh. Bernoulli

Annus propemodum est quod postremas Tuas litteras accepi; ne credas quaeso, diuturni silentii causam fuisse aliquam animi mei alienationem, nosti enim et fateris ipse, quot quantaque Tibi olim dederim benevolentiae testimonia, ut plane non sit cur ullam in me erga Te suspiceris mutationem: Vera potius dilationis causa est partim locorum longinquitas, partim sumtus erogandi in litteras mittendas et recipiendas per Cursorem publicum. Utor itaque hac occasione commoda, qua intra paucos dies ad Te amandare possim dissertationem filii mei Johannis de propagatione Luminis, condecoratam praemio superioris anni ab Academia R. Paris. de qua postquam eam perlegeris judicium Tuum (quod soles ex animi sententia) praestolabimur. Quod quae perscripsisti Filio meo Danieli de utrisque nostrûm dissertationibus super Inclinationibus Orbitarum planetarum, id quod judicas de Danielis opere, videri illud praeproperatum fuisse summa cum festinatione, idem et mihi visum fuerat, quod etiam statim ipsi exprobraveram; et dicere licet quod scribo, credo ipsum ad optatum finem non perventurum fuisse, nisi paucis mensibus ante praemiorum distributionem reditum suum ex Moscovia per Lutetiam sumsisset, ubi occasionem invenit prensandi quorundam benevolentiam aut aliquid aliud moliendi, ut Tu ipse festive jocaris, quando dicis, in dissertatione Danielis hoc unum praecipue laude dignum reperiri, quod praemium reportaverit. In solidiorem mihi vergit gloriam, honorifica quam fers sententia de mea dissertatione, eamque elaboratam esse magna diligentia atque insigni ingenio; quod vero addis dubitare an ipse credam, quaestionem per Theoriam meam plenarie solutam esse; hoc respondeo a nemine exigi posse, ut in rebus mere physicis promittat solutiones omni exceptione majores atque ad rigorem geometricum demonstrabiles, sufficit secundum principia clara et semel stabilita ratiocinando recte procedat: Caeterum puto, Cartesium vel Newtonum, vel alium quemvis ex Philosophis, qui systema Physicum condidit, ausum fuisse vitam aut animam suam oppignerare pro systematis sui exacta convenientia rerum experientia etc:

Dabam Basileae a. d. 2. April 1737.



7.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Prof. C. G. J. Jacobi zu Königsberg in Pr.)

1.

Unter den Formeln, durch welche man die vielen von mir in den *Fundam. nov.* gegebenen Entwicklungen mit leichter Mühe noch vermehren kann, scheint mir die nachfolgende, welche die Tangente der halben Differenz der Amplitude des Integrals u und der Gröfse $\frac{\pi u}{2K}$ selber ergiebt, einen eigenthümlichen Character zu haben.

Da
$$\sqrt{\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-x)}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+x)},$$
so kann man die Formel *F. N.* S. 99 (4.) wie folgt schreiben:

$$1.\quad \sqrt{\left(\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-x)(1-2q\sin x+q^2)(1-2q^2\sin x+q^4)\dots}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+x)(1+2q\sin x+q^2)(1+2q^2\sin x+q^4)\dots}.$$

In der Formel (S. 183)
$$\sqrt[4]{q}.\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\dots$$
$$= \frac{\sqrt[4]{q}.\sin x-\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x-\dots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}$$
setze man $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-x)$ und $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+x)$ für x und gleichzeitig $\sqrt{q}$ für q, so erhält man nach Division mit $\sqrt[4]{q}$ den Zähler und Nenner in (1.), und daher

$$2.\quad \sqrt{\left(\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)} = \operatorname{tang}\left(45^0-\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)$$
$$= \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x)-q\sin 3(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x)+q^3\sin 5(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x)-\dots}{\sin(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)-q\sin 3(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)+q^3\sin 5(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)-\dots},$$
wo die Exponenten von q die dreieckigen Zahlen sind. Setzt man hierin $\frac{1}{2}\pi-x$ für x, so erhält man

$$3.\quad \operatorname{tang}\left(45^0-\tfrac{1}{2}\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\sin\frac{1}{2}x-q\sin\frac{3}{2}x+q^3\sin\frac{5}{2}x-q^6\sin\frac{7}{2}x+\dots}{\cos\frac{1}{2}x+q\cos\frac{3}{2}x+q^3\cos\frac{5}{2}x+q^6\cos\frac{7}{2}x+\dots}.\ *)$$

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit die Formel
$$\sqrt{k'}\operatorname{tang}\operatorname{am}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u.\operatorname{tang}(45^0-\tfrac{1}{2}\operatorname{coam}u))},$$
welche etwas bequemer als die von *Legendre* für die Halbirung gegebne ist.

Nach der S. 31 gemachten Bemerkung gehen $\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ und $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}$ in einander über, wenn man $-q$ für q setzt. Die vorstehende Formel giebt daher sogleich auch folgende:

$$3.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sin\frac{1}{2}x + q\sin\frac{3}{2}x - q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \dots}{\cos\frac{1}{2}x - q\cos\frac{3}{2}x - q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \dots},$$

wo im Zähler und Nenner immer zwei positive und zwei negative Zeichen mit einander abwechseln. Man erhält aus dieser Formel, wenn $i = \sqrt{-1}$,

$$4.\quad \frac{1 + i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1 - i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = e^{i\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}ix} - qe^{-\frac{3}{2}ix} - q^3e^{\frac{5}{2}ix} + q^6e^{-\frac{7}{2}ix} + q^{10}e^{\frac{9}{2}ix} - \dots}{e^{-\frac{1}{2}ix} - qe^{\frac{3}{2}ix} - q^3e^{-\frac{5}{2}ix} + q^6e^{\frac{7}{2}ix} + q^{10}e^{-\frac{9}{2}ix} - \dots}$$

und hieraus

$$e^{i\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)} = \frac{1 + i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)}{1 - i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)}$$

$$= \frac{1 - qe^{-2ix} - q^3e^{2ix} + q^6e^{-4ix} + q^{10}e^{4ix} - \dots}{1 - qe^{2ix} - q^3e^{-2ix} + q^6e^{4ix} + q^{10}e^{-4ix} - \dots}$$

oder

$$5.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right) =$$

$$\frac{(q - q^3)\sin 2x - (q^6 - q^{10})\sin 4x + (q^{15} - q^{21})\sin 6x - \dots}{1 - (q + q^3)\cos 2x + (q^6 + q^{10})\cos 4x - (q^{15} + q^{21})\cos 6x + \dots}.$$

Diese merkwürdige Formel ist zur Berechnung einzelner Werthe oder von Tafeln vorzugsweise bequem. Da $\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{1}{2}K = \frac{1}{\sqrt{k'}}$, also

$$\operatorname{tang}(\operatorname{am}\tfrac{1}{2}K - 45^0) = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}},$$

so erhält man aus (4.), wenn man $x = \frac{1}{2}\pi$ setzt,

$$6.\quad \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'} + \sqrt{(2(1 + k'))}} = \frac{q - q^3 - q^{15} + q^{21} + q^{45} - q^{55} - \dots}{1 - q^6 - q^{10} + q^{28} + q^{36} - q^{66} - \dots}.$$

Setzt man $q = b^8$, so erhält der Bruch rechts die Form

$$\frac{\Sigma \pm b^{(8k \pm 3)^2}}{\Sigma \pm b^{(8k \pm 1)^2}}.$$

Das Zeichen $+$ oder $-$ ist zu nehmen, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Wenn der Modul der Einheit sehr nahe kommt, mufs man sich der Entwicklungen bedienen, welche statt der Kreisfunctionen Exponential-

gröfsen enthalten. Setzt man ix für x und k' für k, so verwandelt sich

$$\tan \tfrac{1}{2} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \quad \text{in} \quad i \tan \tfrac{1}{2} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi},$$

und gleichzeitig q in q', wo q und q' durch die Gleichung

$$\log q \,.\, \log q' = \pi^2$$

mit einander verbunden sind. Nennt man u das elliptische Integral erster Gattung und setzt

$$z = e^x = e^{\frac{\pi u}{2K'}}, \qquad \operatorname{am}(u, k) = \varphi,$$

so erhält man aus (4.) folgende Entwicklung von ebenfalls eigenthümlicher Form:

$$7. \quad \tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - q' z^2 - q'^3 z^{-2} + q'^6 z^4 + q'^{10} z^{-4} - \ldots}{1 - q' z^{-2} - q'^3 z^2 + q'^6 z^{-4} + q'^{10} z^4 - \ldots}.$$

Wenn φ sich sehr der Gränze $\frac{1}{2}\pi$ und daher z der Gränze $\frac{1}{\sqrt{q'}}$ nähert, werden je zwei aufeinander folgende Terme in Zähler und Nenner nahe gleich oder entgegengesetzt. Vereinigt man sie in ein Glied, so bleibt die Convergenz noch überaus grofs. Ist z. B. $k = \frac{19}{20}$, so wird ungefähr $q = \frac{1}{8}$, so dafs die Formel (5.) noch sehr rasch convergirt. Aber es wird dann schon q' ungefähr $\frac{1}{150}$, so dafs man für alle Amplituden mit der Formel

$$\tan(41^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - q' z^2 - q'^3 z^{-2}}{1 - q' z^{-2} - q'^3 z^2}$$

ausreicht, um φ bis auf 0″01 genau zu haben.

Ich will noch einen sehr convergirenden Ausdruck für die ganzen Integrale zweiter Gattung hinzufügen. Vergleicht man nämlich die beiden Formeln *Fund.* S. 110.

$$\tfrac{1}{2}\pi A = \left(\frac{2xK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}\, dx = 4\pi \left[\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} \text{ etc.}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\pi B = \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}\, dx = 4\pi \left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} \text{ etc.}\right],$$

so sieht man, dafs A in $-B$, B in $-A$ übergeht, wenn man $-q$ für q setzt. Differenziirt man ferner die Formel *Fund.* S. 103 (3.), nemlich

$$\log \frac{2K}{\pi} = 4\left[\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{3(1+q^3)} + \frac{q^5}{5(1+q^5)} + \text{etc.}\right],$$

so erhält man

$$\frac{2q\,dK}{K\,dq} = B.$$

Hieraus folgt nach S. 184 (6.)

$$4q\frac{d}{dq}\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}.B = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta(\varphi)}$$
$$= 8(q+4q^4+9q^9+16q^{16}\text{ etc.}).$$

Setzt man hierin $-q$ für q, wodurch K in $k'K$, B in $-A$ übergeht, so erhält man

$$\sqrt{k'}.k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta} = 8(q-4q^4+9q^9-16q^{16}\text{ etc.}),$$

und daher, durch Addition und Subtraction, zur Bestimmung der ganzen Integrale zweiter Gattung die Formeln:

$$C = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi+\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 16(q+9q^9+25q^{25}\ldots.)$$
$$D = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi-\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 64(q^4+4q^{16}+9q^{36}\text{ etc.}),$$

von denen besonders die zweite bemerkenswerth ist, indem sie zeigt, dafs der Werth des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi-\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}$$

von der Ordnung der *sechsten* Potenz des Moduls und von

$$\frac{64q^4}{k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

nur in Gröfsen von der Ordnung der *dreifsigsten* Potenz des Moduls verschieden ist, welche aufserdem noch durch überaus grofse Zahlen dividirt wird. Man sieht auch aus der vorstehenden Formel, dafs

$$B < A \quad\text{und}\quad B > \sqrt{k}\,.\,A.$$

Um aus D den Werth von E' zu finden, dient die Formel

$$(1-\sqrt{k})E' = \sqrt{k}(1-\sqrt{k^3})F' - \frac{\frac{1}{2}\pi D}{\left(\frac{2F'}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Auch kann man die Formel

$$-(1-\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

bemerken. Da immer

$$q > \frac{k^2}{16}, \quad q < \frac{k^2}{16k'},$$

so ist in der Entwicklung von D der erste Term, welcher, extreme Fälle abgerechnet, allein einen Werth erhält, immer $< \frac{k^8}{1024k'^4}$. Man sieht,

wie genau für nicht allzugrofse Moduln die beiden Gröfsen

$$(1+\sqrt{k'})F^I \quad \text{und} \quad \sqrt{k'}(1+\sqrt{k'^3})E^I$$

mit einander übereinkommen, indem die Differenz, nach den Potenzen von k^2 entwickelt, mit dem Term $\frac{1}{2}\pi.\frac{k^8}{1024}$ beginnt.

2.

Man kann bei Berechnung der elliptischen Integrale mit Vortheil die *Gaufsischen* Tafeln anwenden, in welchen für einen unter der Columne A als Argument gegebenen $\log x$, wo $x > 1$ der Werth von $\log(1+x)$ in der Columne C sich befindet. Ich will hierüber in einige nähere Erörterungen eingehen.

Es sollen im Folgenden die Werthe von A mit einem lateinischen Buchstaben und die entsprechenden von $C - \frac{1}{2}A - 0.3010300$ mit dem entsprechenden griechischen bezeichnet werden, so dafs man, wenn $m > n$ und $a = \log\frac{m}{n}$,

$$\alpha = \log\frac{m+n}{2\sqrt{(mn)}}$$

oder α gleich dem Logarithmus des Verhältnisses des arithmetischen und geometrischen Mittels von m und n setzt. Ist $-a$ der Logarithmus des Complements eines gegebenen Moduls, so wird hiernach $-\alpha$ der Logarithmus des Complements des kleineren Moduls, in welchen der gegebene durch die *Landen*sche Substitution transformirt wird. Setzt man nun nach einander

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad a' = \alpha, \quad a'' = \alpha', \quad a''' = \alpha'' \text{ u. s. w.},$$

indem man immer den gefundenen Werth von $\alpha^{(i)}$ zum Argument A macht und den entsprechenden Werth von $\alpha^{(i+1)} = C - \frac{1}{2}A - 0.3010300$ aufsucht, bis man auf verschwindende Gröfsen kommt, so wird, nach der S. 97 angewandten Bezeichnung,

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad a' = \alpha = \log\frac{m'}{n'}, \quad a'' = \alpha' = \log\frac{m''}{n''} \text{ etc.}$$

Man erhält ferner aus den Formeln

$$mn = n'n', \quad m'n' = n''n'', \quad \ldots\ldots \quad m^{(i-1)}n^{(i-1)} = n^{(i)}n^{(i)}$$

die Gleichung

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'} \ldots\ldots \frac{m^{(i-1)}}{n^{(i-1)}} = \frac{n^{(i)}n^{(i)}}{nn},$$

und daher, wenn durch μ die Gränze bezeichnet wird, welcher die Gröfsen

$n^{(i)}$ sehr schnell sich nähern,

$$\log\mu = \log n + \tfrac{1}{2}[a + a' + a'' + \ldots].$$

Der so für μ erhaltene Werth giebt bekanntlich das ganze elliptische Integral erster Gattung durch die Formel

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{\mu}.$$

Die Gröfsen n', n'' etc. selber findet man durch successive Addition von $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a'$ etc. vermittelst der Formeln

$$\log n' = \log n + \tfrac{1}{2}a, \quad \log n'' = \log n' + \tfrac{1}{2}a' \ldots,$$

und hieraus

$$\log m' = \log n' + a', \quad \log m'' = \log n'' + a'' \ldots.$$

Gaufs hat in seiner Abhandlung „Determinatio attractionis" auch eine sehr bequeme Anordnung für die Berechnung des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung mitgetheilt. Berechnet man nämlich

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{(mm - nn)}, \quad \lambda' = \frac{\lambda\lambda}{m'}, \quad \lambda'' = \frac{\lambda'\lambda'}{m''}, \ldots,$$

$$\nu = \frac{2\lambda'\lambda' + 4\lambda''\lambda'' + 8\lambda'''\lambda''' + \ldots}{\lambda\lambda},$$

so findet man nach einer Formel, welche im Wesentlichen mit der von *Legendre* gegebenen übereinkommt,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = -\frac{\nu}{\mu}.$$

Die Gröfsen $\frac{4\lambda}{m}$, $\frac{4\lambda'}{m'}$, $\frac{4\lambda''}{m''}$ etc. oder $\frac{4\lambda}{m}$, $\frac{4\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}$, $\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda'\lambda'}$ etc. sind der gegebene und die nach und nach transformirten Moduln. Nach *Fund.* S. 149 (4.) findet man die Gröfse q durch die Formel

$$\log q = 2\log\lambda + a - \tfrac{3}{2}a' - \tfrac{7}{4}a'' - \tfrac{15}{8}a''' \text{ etc.}$$

Um das unbestimmte Integral erster Gattung zu finden, hat man nach *Fund.* S. 97 die Gröfsen Δ' aus den vorhergehenden Δ durch die Formel

$$\Delta' = \sqrt{\left(\frac{mm'(\Delta + n)}{m + \Delta}\right)}$$

zu berechnen, woraus folgt:

$$\frac{m'}{\Delta'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{m}{\Delta}}{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}{1 + \frac{\Delta}{n}}}.$$

$$\frac{\Delta'}{n'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}{1 + \frac{m}{\Delta}}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{\Delta}{n}}{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}}.$$

Setzt man daher

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad b = \log\frac{m}{\Delta}, \quad c = \log\frac{\Delta}{n},$$
$$a' = \alpha, \quad b' = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma), \quad c' = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma),$$
$$a'' = \alpha', \quad b'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta'-\gamma'), \quad c'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta'+\gamma'),$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.},$$

wo man immer, wenn man in den *Gaufsischen* Tafeln $A = a^{(i)}$, $b^{(i)}$ oder $c^{(i)}$ nimmt, die Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ oder $\gamma^{(i)}$ durch die Formel

$$C - \tfrac{1}{2}A - 0.3010300$$

erhält, so wird

$$\log\frac{m^{(i)}}{\Delta^{(i)}} = b^{(i)}, \qquad \log\frac{\Delta^{(i)}}{n^{(i)}} = c^{(i)}.$$

Für das Integral

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = \Phi$$

findet man hiernach durch die Formel S. 98

$$\log\operatorname{tang}\mu\Phi = \log\operatorname{tang}\varPhi + \log\frac{\Delta'\Delta''\Delta'''\ldots.}{mm'm''\ldots.}$$
$$= \log\operatorname{tang}\varPhi + \log\frac{\mu}{m} - b' - b'' - b''' - \text{ etc.}$$

Man kann auch die ersten Gröfsen $\frac{m}{\Delta}$ und $\frac{\Delta}{n}$ auf analoge Art durch $\operatorname{tang}\varPhi$ finden. Sind nämlich b^0, c^0 positive Gröfsen, welche durch die Gleichungen

$$\pm\log\operatorname{tang}^2\varPhi = b^0, \qquad \pm\log\frac{n^2}{m^2}\operatorname{tang}^2\varPhi = c^0$$

bestimmt werden, so wird

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(\alpha^0+\beta^0-\gamma^0), \qquad \log\frac{\Delta}{n} = c = \tfrac{1}{2}(\alpha^0-\beta^0+\gamma^0),$$

wo $\alpha^0 = a$. Die Gröfse $\mu\Phi$ ist der in den Reihen-Entwicklungen mit x bezeichnete Winkel.

Aus der von *Gaufs* angewandten Substitution

$$\sin\varPhi = \frac{2m\sin\varphi'}{(m+n)\cos^2\varphi' + 2m\sin^2\varphi'}$$

findet man

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}, \qquad \operatorname{tang}\varPhi' = \frac{\Delta'}{m}\operatorname{tang}\varPhi,$$

wo, wie im Vorhergehenden,

$$\Delta = \sqrt{(mm\cos^2\varPhi + nn\sin^2\varPhi)}, \qquad \Delta' = \sqrt{(m'm'\cos^2\varPhi' + n'n'\sin^2\varPhi')}.$$

Hieraus folgt:

$\log \frac{\sin \varphi'}{m'} = \log \frac{\sin \varphi}{m} + \frac{1}{2} b - \beta, \quad \log \frac{\sin \varphi''}{m''} = \log \frac{\sin \varphi'}{m'} + \frac{1}{2} b' - \beta'$, etc.,

$\log \cos \Phi' = \log \cos \Phi + b' + \frac{1}{2} b - \beta, \; \log \cos \Phi'' = \log \cos \Phi' + b'' + \frac{1}{2} b' - \beta'$, etc.

Man hat so durch die bereits berechneten Werthe von $b^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ und durch $\log \sin \Phi$, $\log \cos \Phi$ nacheinander durch bloſse Addition die Werthe von $\log \sin \Phi'$, $\log \cos \Phi'$, $\log \sin \Phi''$, $\log \cos \Phi''$ etc. Diese Gröſsen dienen dazu, die von *Gauſs* für das *unbestimmte* Integral zweiter Gattung gegebne Formel zu berechnen, welche man, mit einer kleinen Veränderung, so darstellen kann:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos 2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(mm \cos^2 \varphi + nn \sin^2 \varphi)}} = -\nu \Phi + \frac{\cos \varphi \sin \varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos \varphi' \sin \varphi''}{m''} + \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos \varphi'' \sin \varphi'''}{m''} + \text{etc.}$$

Bezeichnet man das vorstehende Integral mit P und, wie *Legendre*, mit F^I, E^I die ganzen, mit $F(\Phi)$, $E(\Phi)$ die unbestimmten elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so daſs $F(\Phi) = \Phi$, so wird, für $m = 1$,

$$E(\Phi) = \tfrac{1}{2}(\Phi + P) + \tfrac{1}{2}(k'k')(\Phi - P),$$
$$\frac{E^I}{F^I} = \tfrac{1}{2}(1 - \nu) + \tfrac{1}{2}(k'k')(1 + \nu),$$

und daher

$$\frac{F^I E(\varphi) - E^I F(\varphi)}{F^I} = \tfrac{1}{2} k^2 (P + \nu \Phi)$$
$$= \frac{mm - nn}{2mm} \left[\frac{\cos \varphi \sin \varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos \varphi' \sin \varphi''}{m''} + \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos \varphi'' \sin \varphi'''}{m'''} + \ldots \right].$$

Zufolge des oben für $\frac{\sin \varphi'}{m'}$ gegebenen Werthes wird

$$\int \frac{\cos \varphi \sin \varphi'}{m'} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\Delta (m + \Delta)}$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}(mm - nn) \int_0^{\varphi} \frac{\cos \varphi \sin \varphi'}{m'} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = \log \frac{2m}{m + \Delta}.$$

Setzt man daher, wie in den *Fundam.*,

$$e^{\int_0^{\varphi} \frac{F^I E(\varphi) - E^I F(\varphi)}{F^I} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)},$$

und bemerkt die Formeln

$$(mm - nn) \frac{\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = m'm' - n'n', \quad (mm - nn) \frac{\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = m''m'' - n''n'', \text{ etc.},$$

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{d\varphi'}{\Delta'} = \frac{d\varphi''}{\Delta''} \text{ etc.,}$$

so erhält man einen neuen zur Berechnung bequemen Ausdruck für die Function $\Theta(u)$:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} = \frac{2m}{m+\Delta}\cdot\left(\frac{2m'}{m'+\Delta'}\right)^2\cdot\left(\frac{2m''}{m''+\Delta''}\right)^4\cdot\left(\frac{2m'''}{m'''+\Delta'''}\right)^8 \cdots.$$

Da $\log\frac{2m}{m+\Delta} = \frac{1}{2}b-\beta$, so giebt diese Formel die folgende:

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \tfrac{1}{2}b-\beta+b'-2\beta'+2b''-4\beta''+4b'''-8\beta''' \text{ etc.},$$

welcher man noch verschiedne andre Formen geben kann.

3.

Setzt man $k=\frac{\sqrt{(mm-nn)}}{m}$, $k^{(2)}=\frac{\sqrt{(m'm'-n'n')}}{m'}$, ferner

$$K^{(2)} = \tfrac{1}{2}(1+k').K, \qquad \Phi = \operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right),$$

so wird

$$\Phi' = \operatorname{am}\left(\frac{2K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right).$$

Zufolge der S. 92 gemachten Bemerkung verwandelt sich daher k, K, Φ in $k^{(2)}$, $K^{(2)}$, Φ', wenn man q^2 für q setzt. Dies erhält eine Bestätigung durch die Formel

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{m\operatorname{tang}\varphi'}{\Delta'} = \frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(1-k^{(2)2}\sin^2\varphi')}}.$$

Wenn man nämlich aus den S. 88 für $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\Delta\Phi$ gegebnen Zerfällungen in unendliche Producte den Werth von $\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi}$ entnimmt und in demselben q^2 für q setzt, so erhält man sogleich den Ausdruck für $\frac{1}{2}(1+k')\operatorname{tang}\Phi$. Umgekehrt kann man auf diese Art die vorstehende Formel, durch welche Φ aus Φ' bestimmt wird, unmittelbar aus jenen Factorenzerfällungen von $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\Delta\Phi$ ableiten.

Für $m=1$ hat man die Formel S. 101 (16.):

$$\frac{2k'k'K}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{coam}u}{\cos\operatorname{am}u} = \operatorname{tang}x-\frac{4q\sin 2x}{1+q}+\frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2}-\text{ etc.}$$

Setzt man hierin q^2 für q, so verwandelt sich der Ausdruck links in

$$\frac{2k'}{1+k'}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(1-k^{(2)2}\sin^2\varphi')}} = \frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\Phi.$$

Man kann daher zu den in den *Fundam.* mitgetheilten Reihen noch die folgende fügen:

$$\frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \operatorname{tang}x-\frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2}+\frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4}-\frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6}+\text{ etc.}$$

Ueberhaupt bietet die Betrachtung, durch welche diese Formel abgeleitet ist, ein wichtiges Mittel dar, aus den gefundnen Resultaten mit Leichtigkeit neue abzuleiten. Man bemerke z. B., dafs, wenn man in dem für $\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}}$ oben gefundnen Ausdruck $k^{(2)}$ für k oder q^2 für q setzt und ihn dann in's Quadrat erhebt, dasselbe Resultat sich ergiebt, als wenn man den Ausdruck mit $\frac{m+\Delta}{2m}$ multiplicirt. Da sich nach S. 62. $k'K$ dadurch, dafs man q^2 für q setzt, in $\sqrt{k'}.K$ verwandelt und nach S. 165.

$$\frac{\Delta}{m}.\Theta(u) = \sqrt{k'}.\Theta(u+K)$$

ist, so erhält man hieraus die Gleichung

$$2\Theta^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}\Theta u + \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\Theta(u+K).$$

Die oben gegebne Gleichung

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}$$

kann man auch so darstellen:

$$k^{(2)}\sin^2\Phi' = \frac{1-k'}{1+k'}.\sin^2\Phi' = \frac{m-\Delta}{m+\Delta}.$$

Aus der Formel S. 178 (1.) folgt aber, wenn man $k^{(2)}$ für k setzt,

$$k^{(2)}\sin^2\Phi' = \frac{1-k'}{1+k'}\sin^2\Phi' = \frac{H^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}$$

und daher

$$\frac{H^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \frac{m-\Delta}{m+\Delta} = \frac{\Theta u - \sqrt{k'}.\Theta(u+K)}{\Theta u + \sqrt{k'}.\Theta(u+K)},$$

woraus

$$2H^2(\tfrac{1}{2}(1+k').u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}\Theta u - \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\Theta(u+K)$$

folgt. Ersetzt man die Formel

$$\sqrt{k^{(2)}}\sin\Phi' = \sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)}\sin\Phi' = \frac{k\sin\varphi}{1+\frac{\Delta}{m}}$$

durch die folgende:

$$\frac{H(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \sqrt{k}.\frac{Hu}{\Theta u + \sqrt{k'}.\Theta(u+K)},$$

so erhält man

$$2H(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}).\Theta(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)}H(u):$$

eine Formel, welche sich unmittelbar aus der Darstellung von Θu und $\mathrm{H} u$ als unendliche Producte ergiebt. Die drei gefundnen Formeln geben die Gleichungen

$$2[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\dots]^2$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\dots)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\dots)$$
$$+(1-2q+2q^4-2q^9+\dots)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\dots),$$

$$8[\sqrt{q}.\sin x-\sqrt{q^9}.\sin 3x+\sqrt{q^{25}}.\sin 5x-\dots]^2$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\dots)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\dots)$$
$$-(1-2q+2q^4-2q^9+\dots)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\dots),$$

$$[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\dots)(\sqrt{q}.\sin x-\sqrt{q^3}.\sin 3x+\sqrt{q^5}.\sin 5x\dots)$$
$$=(\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\dots)(\sqrt[4]{q}.\sin x-\sqrt[4]{q}.\sin 3x=\sqrt[4]{q}.\sin 5x-\dots).$$

Dies sind die einfachsten Fälle sehr wichtiger und sehr allgemeiner Formeln für die Verwandlung der Potenzen und Producte der Functionen Θu und $\mathrm{H} u$ in ein Aggregat lineärer Ausdrücke.

Die Rechnungsvorschriften, welche auf der von *Legendre* hauptsächlich untersuchten *Landen*schen Transformation beruhen, erfordern zur Auffindung der Werthe der unbestimmten Integrale erster Gattung den Gebrauch trigonometrischer Tafeln. Man berechnet φ_1, φ_2 etc. durch die Formel

$$\log\operatorname{tang}(\varphi_1-\varphi)=\log\operatorname{tang}\varphi-a, \quad \text{etc.}$$

Die Winkel $\frac{1}{2}\varphi$, $\frac{1}{4}\varphi_2$ etc. nähern sich sehr bald der Gränze

$$\mu\Phi=\mu\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi)}}.$$

Um die unbestimmten Integrale zweiter Gattung zu finden, setze man

$$\frac{Z}{m}=\frac{F^I E(\varphi)-E^I F(\varphi)}{F^I}=\frac{mm-nn}{2m}\left[\int_0^{\varphi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta}+\nu\Phi\right]$$

und bezeichne mit $\frac{Z_i}{m^{(i)}}$ die analogen Gröſsen, welche man erhält, wenn man $m^{(i)}$, $n^{(i)}$, φ_i für m, n, φ setzt. Die *Legendre*schen Formeln geben dann

$$Z_1=Z-4\lambda'\sin\varphi_1, \qquad Z_2=Z_1-4\lambda''\sin\varphi_2, \quad \text{etc.}$$

und daher

$$Z=4[\lambda'\sin\varphi_1+\lambda''\sin\varphi_2+\lambda'''\sin\varphi_3+\text{etc.}].$$

Multiplicirt man diese Formel mit

$$\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{2}\frac{d\varphi_1}{\Delta_1}=\frac{1}{4}\frac{d\varphi_2}{\Delta_2}\ \text{etc.},$$

und bemerkt, daſs

$$\frac{4\lambda'\sin\varphi_1\, d\varphi}{\Delta}=\tfrac{1}{4}(mm-nn).\frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}=-\tfrac{1}{2}d\log\frac{\Delta}{m}$$

so erhält man durch Integration

$$e^{\int_0^\varphi \frac{Z d\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{m}{\Delta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{\Delta_1}} \cdot \sqrt[8]{\frac{m''}{\Delta_2}} \dots,$$

welches der in den *Fundam.* S. 151. durch Betrachtung der unendlichen Producte gefundne Ausdruck ist. Es steht aber dort aus Versehen der inverse Werth. Eben so müssen S. 150. für $\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\frac{1}{\sqrt{k^{(p)\prime}}}\Delta\,\mathrm{am}\frac{2K^{(p)}x}{\pi}$, $\Delta^{\frac{1}{2}}\,\Delta^{(2)\frac{1}{4}}\dots$, $\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)}$ die inversen Werthe gesetzt werden. Die Gröfsen Δ, Δ_1 etc. kann man durch die Formeln

$$\cos(2\Phi - \Phi_1) = \frac{\Delta}{m}, \quad \cos(2\Phi_1 - \Phi_1) = \frac{\Delta_1}{m'} \quad \text{etc.}$$

berechnen. Diese geben den Ausdruck

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\cos(2\varphi - \varphi_1))}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\cos(2\varphi_1 - \varphi_2))}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(\cos(2\varphi_2 - \varphi_3))}} \dots,$$

welcher blofs von den Amplituden abhängt. Will man die in den *Fundam.* mitgetheilte Berechnungsweise der Gröfsen Δ_1, Δ_2 etc. anwenden, so gebraucht man wieder mit Vortheil die *Gaufs*ischen Tafeln.

4.

Ich will die hauptsächlichsten der im Vorigen mitgetheilten Formeln durch ein von *Legendre* ebenfalls behandeltes numerisches Beispiel erläutern, welches sich auf einen schon ziemlich grofsen Modul $k = \sin 75°$ bezieht.

Es sei

$$m = 1, \qquad \log n = \log \sin 15° = 9.4129962,$$
$$\Phi = 47° \, 3' \, 30'' \, 95,$$

wo $\operatorname{tang}\Phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Die benutzten Tafeln sind die auf 7 Stellen berechneten *Matthiessischen* (Altona 1817). Bei den Interpolationen ist noch immer die 8te Stelle mitgenommen worden, um den Fehler in der 7ten zu verringern.

Setzt man $a = \log\frac{1}{n} = 0.5870038$, ferner

$$\log \operatorname{tang}\Phi^2 = b^0 = 0.0624693.6,$$
$$\log\frac{n^2}{m^2}\operatorname{tang}\Phi^2 = c^0 = 8.8884617.6,$$

und sucht nach der in der Abhandlung angegebnen Regel aus den *Matthiessi-schen* Tafeln die Werthe

$$\beta^0 = 0.0011222.3,$$
$$\gamma^0 = 0.2870960.3,$$

so findet man nach und nach:

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(a+\beta^0-\gamma^0) = 0.1505150, \qquad \beta = 0.0064882.3,$$

$$\log\frac{\Delta}{n} = c = \quad a - b \quad = 0.43648880, \qquad \gamma = 0.0526732.3,$$

$$a' = 0.0924352.2, \quad b' = 0.0231251.1, \quad c' = 0.0693101.1,$$
$$\beta' = 0.0001539.7, \quad \gamma' = 0.0013812.0,$$
$$a'' = 0.0024545.8, \quad b'' = 0.0006136.7, \quad c'' = 0.0018409.1,$$
$$\beta'' = 0.0000001.0, \quad \gamma'' = 0.0000009.0,$$
$$a''' = 0.0000018.0, \quad b''' = 0.0000005.0, \quad c''' = 0.0000013.0.$$

Hat man hier aus a^i, b^i, c^i die Gröfsen α^i, β^i, γ^i gefunden, indem man nach der allgemeinen Regel

$$a^i,\ b^i \text{ oder } c^i = A \quad \text{und} \quad \alpha^i,\ \beta^i,\ \gamma^i = C - \tfrac{1}{2}A - 0.300103000$$

setzt, wo C aus A durch die *Matth.* Tafeln gegeben ist, so wird

$$a^{i+1} = \alpha^i, \qquad b^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i+\beta^i-\gamma), \qquad c^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i-\beta^i+\gamma^i),$$

und daher immer $a^i = b^i + c^i$. Wenn daher $\log\frac{1}{n}$, $\log\operatorname{tang}\varphi$ gegeben ist, so hat man zur Berechnung aller vorstehenden Gröfsen nur *achtmal* in die Tafeln zu gehen. Hiermit ist aber schon fast alles gegeben, was zur Berechnung der ganzen und unbestimmten Integrale erster und zweiter Gattung und der Gröfsen $\log q$ und $\log\Theta$ erforderlich ist. Denn man hat zunächst

$$\log\mu = \log\frac{\pi}{2F^I} = \log n + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{2}a'' + \tfrac{1}{2}a''' = 9.75394390.$$

Um $\log q$ zu finden, braucht man noch den log. des vierten Theils des Moduls

$$\log\lambda = \log\tfrac{1}{4}\sqrt{(mm-nn)} = 9.3828837.7;$$

dann wird

$$\log q = 2\log\lambda + a - 3[\tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{4}a'' + \tfrac{1}{8}a'''] = 9.2122768.7.$$

Setzt man ferner $\Phi = F(\varphi)$, so wird

$$\log\operatorname{tang}\mu\Phi = \log\operatorname{tang}\varphi + \log\frac{\mu}{m} - [b' + b'' + b'''] = 9.7614393.0.$$

Der genaue Werth von $x = \mu\Phi$ ist 30^0 und man hat nach den Tafeln $\log\operatorname{tang} 30^0 = 9.7614393.7$. Man findet ferner

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \int_0^\varphi \left[E(\varphi) - \frac{E^I}{F^I}F(\varphi)\right]\frac{d\varphi}{\Delta}$$
$$= \tfrac{1}{2}b + b' + 2b'' + 4b''' - [\beta + 2\beta' + 4\beta''] = 0.0928153.9.$$

Um die Integrale zweiter Gattung zu erhalten, mufs man zuvor durch Addition und Subtraction die Logarithmen der Gröfsen m^i, n^i, λ^i bilden:

$$\log n' = 9.7064981,\quad \log m' = 9.7989333.2,\quad \log\lambda' = 8.9668342,$$
$$\log n'' = 9.7527157.1,\quad \log m'' = 9.7551702.9,\quad \log\lambda'' = 8.1784981,$$
$$\log n''' = 9.7539430.0,\quad \log m''' = 9.7539448.0,\quad \log\lambda''' = 6.60305,$$
$$\log n^{IV} = 9.7539439.0,\quad \log m^{IV} = 9.7539439.0,\quad \log\lambda^{IV} = 3.452.$$

Hier ist,

$$\log n^{i+1} = \log n^i + \tfrac{1}{2}\alpha^i,\quad \log m^i = \log n^i + \alpha^i,\quad \log\lambda^{i+1} = 2\log\lambda^i - \log m^{i+1}.$$

Hiernach findet man

$$\log\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 9.4689309,\qquad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 0.2943952.7,$$
$$\log\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 8.1932888,\qquad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 0.01560519.0,$$
$$\log\frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 5.34343,\qquad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 0.0000220.5,$$
$$\nu = 0.3100232.2.$$

Der gefundene Werth von ν, welcher das Aufschlagen *dreier* Zahlen erforderte, giebt

$$\nu = \frac{-1}{F^I}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi};\qquad \frac{E^I}{F^I} = \frac{mm+nn}{2mm} - \frac{mm-nn}{2mm}\,\nu.$$

Zur Berechnung des unbestimmten Integrals zweiter Gattung geht man von den Werthen von $\log\sin\Phi$, $\log\cos\Phi$ aus und findet dann durch successives Addiren:

$$\log\frac{\sin\varphi}{m} = 9.8645412.7 \qquad\qquad \log\cos\Phi = 9.8333065.7$$
$$\tfrac{1}{2}b - \beta = 0.0687692.8 \qquad\qquad b' + \tfrac{1}{2}b - \beta = 0.0918943.9$$

$$\log\frac{\sin\varphi}{m'} = 9.9333105.5 \qquad\qquad \log\cos\Phi' = 9.9252009.6$$
$$\tfrac{1}{2}b' - \beta' = 0.0114085.9 \qquad\qquad b'' + \tfrac{1}{2}b' - \beta' = 0.0120222.6$$

$$\log\frac{\sin\varphi''}{m''} = 9.9447191.4 \qquad\qquad \log\cos\Phi'' = 9.9372232.2$$
$$\tfrac{1}{2}b'' - \beta'' = 0.0003067.4 \qquad\qquad b''' + \tfrac{1}{2}b'' - \beta'' = 0.0003072.4$$

$$\log\frac{\sin\varphi'''}{m'''} = 9.9450258.8 \qquad\qquad \log\cos\Phi''' = 9.9375304.6$$
$$\tfrac{1}{2}b''' = 2.5$$

$$\log\frac{\sin\varphi^{IV}}{m^{IV}} = 9.9450261.3$$

$$\log\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} = 9.7666171.2 \qquad \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} = 0.5842747.0$$

$$\log\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} = 9.3388510.0 \qquad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} = 0.2181981.5$$

$$\log\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} = 8.0755378.6 \qquad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} = 0.0118997.5$$

$$\log\frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'''\sin\varphi^{\text{IV}}}{m^{\text{IV}}} = 5.22599 \qquad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'''\sin\varphi^{\text{IV}}}{m^{\text{IV}}} = 0.0000168.3$$

$$\log\nu = 9.4913942.9 \qquad 0.8143894.3$$

$$\log\nu\Phi = \log\frac{\nu}{\mu}\,30^0 = 9.4564490.9 \qquad \nu\Phi = 0.2860547.2$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = 0.5283347.1.$$

Man hat zur Berechnung des vorstehenden Integrals zwar nur *fünf* Zahlen aufzuschlagen, aber sehr viele Additionen zu machen. Es wird daher eben so vortheilhaft die Gröfse $\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}+$ etc. auch durch die Formel

$$\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}+\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''}+\text{etc.}$$

$$= \frac{1}{8\lambda\lambda}\left[E(\Phi)-\frac{E^I}{F^I}F(\Phi)\right] = \frac{1}{2\lambda\lambda\mu}\cdot\frac{q\sin 2x-2q^4\sin 4x+3q^9\sin 6x\text{ etc.}}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x\text{ etc.}}$$

berechnet werden können. Da hier $x = 30^0$ und $\log q = 9.2122768.7$ ist, so findet man, wenn man den Bruch mit $\frac{Z}{N}$ bezeichnet,

$$\begin{aligned} q\sin 2x &= 0.1411911.5 & q\cos 2x &= 0.0815167.5 \\ 2q^4\sin 4x &= 0.0012236.8 & -q^4\cos 4x &= 0.0003532.4 \\ Z &= 0.1399674.7 & -q^9\cos 6x &= 0.8 \\ \log Z &= 9.1460271.7 & N &= 9.8362601.8 \\ \log N &= 9.9223413.9 & &= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x \end{aligned}$$

$$\log\frac{Z}{2\lambda\lambda\mu N} = 9.9108321.4;\quad \frac{1}{2\lambda\lambda\mu}\cdot\frac{Z}{N} = 0.8143894.4.$$

Die frühere Rechnung gab dieselbe Gröfse 0.8143894.3. Den Werth von $\log N$ kann man auch aus der Formel

$$\log N = \log\frac{\Theta u}{\Theta 0}+\tfrac{1}{2}\log\frac{n}{\mu}$$

erhalten. Wir fanden aber oben

$$\log\frac{\Theta u}{\Theta 0} = 0.0928153.9,$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{n}{\mu} = 9.8295261.5,$$

und hieraus wird

$$\log N = 9.9223415.4,$$

welches nur um 1.5 in der 7ten Stelle von dem durch die Reihen-Entwicklung gefundnen Werthe abweicht.

Sehr leicht wird die Berechnung von ν durch die Formel

$$-(1+\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F^I - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

oder

$$\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\nu}{\mu} = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{\mu} - \frac{\mu^{\frac{1}{2}}D}{8\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{m-n}{2(m'+n')} = \frac{mm-nn}{2(m'+n')(m+n)} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''},$$

$$\sqrt{m}+\sqrt{n} = \sqrt{(2(m'+n'))} = 2\sqrt{m''},$$

und daher, wenn man q^{16}, als unmerklich, wegläfst,

$$\nu = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{\sqrt{m}.\mu^{\frac{1}{2}}D}{16\lambda\lambda\sqrt{m''}} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{1}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\log\frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 9.5126939.3; \qquad \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 0.3256071.8,$$

$$\log\frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{1}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda} = 8.1926745.4; \qquad \frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{1}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda} = 0.0155838.4,$$

$$\nu = 0.3100233.4,$$

welches nur um 1.2 in der 7ten Stelle vom oben gefundnen Werthe abweicht.

Königsberg, den 12. Juni 1843.

Ich füge die folgende Tabelle hinzu, welche für die Werthe des Argumentes $\vartheta = \text{arc}\sin k$ von Zehntel zu Zehntel Grad die Werthe von $\log q$ bis auf 5 Decimalstellen nebst den ersten Differenzen giebt.

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
0.0	Infinitum.		5.0	6.67813	1722	10.0	7.28185	869
0.1	3.27964	0.60206	5.1	6.69535	1689	10.1	7.29054	860
0.2	3.88170	35218	5.2	6.71224	1657	10.2	7.29914	852
0.3	4.23388	24988	5.3	6.72881	1626	10.3	7.30766	844
0.4	4.48376	19382	5.4	6.74507	1596	10.4	7.31610	836
0.5	4.67758	15836	5.5	6.76103	1567	10.5	7.32446	828
0.6	4.83594	13390	5.6	6.77670	1540	10.6	7.33274	820
0.7	4.96984	11599	5.7	6.79210	1513	10.7	7.34094	813
0.8	5.08583	10231	5.8	6.80723	1488	10.8	7.34907	805
0.9	5.18814	9152	5.9	6.82211	1462	10.9	7.35712	798
1.0	5.27966	8279	6.0	6.83673	1439	11.0	7.36510	791
1.1	5.36245	7457	6.1	6.85112	1415	11.1	7.37301	784
1.2	5.43702	7054	6.2	6.86527	1392	11.2	7.38085	777
1.3	5.50756	6437	6.3	6.87919	1371	11.3	7.38862	771
1.4	5.57193	5994	6.4	6.89290	1349	11.4	7.39633	763
1.5	5.63187	5606	6.5	6.90639	1329	11.5	7.40396	758
1.6	5.68793	5267	6.6	6.91968	1310	11.6	7.41154	750
1.7	5.74060	4965	6.7	6.93278	1289	11.7	7.41904	745
1.8	5.79025	4697	6.8	6.94567	1272	11.8	7.42649	738
1.9	5.83722	4456	6.9	6.95839	1252	11.9	7.43387	732
2.0	5.88178	4239	7.0	6.97091	1236	12.0	7.44119	727
2.1	5.92417	4042	7.1	6.98327	1218	12.1	7.44846	720
2.2	5.96459	3862	7.2	6.99545	1201	12.2	7.45566	714
2.3	6.00321	3697	7.3	7.00746	1185	12.3	7.46280	709
2.4	6.04018	3547	7.4	7.01931	1169	12.4	7.46989	703
2.5	6.07565	3408	7.5	7.03100	1154	12.5	7.47692	698
2.6	6.10973	3279	7.6	7.04254	1139	12.6	7.48390	693
2.7	6.14252	3160	7.7	7.05393	1124	12.7	7.49083	686
2.8	6.17412	3050	7.8	7.06517	1110	12.8	7.49769	682
2.9	6.20462	2946	7.9	7.07627	1096	12.9	7.50451	677
3.0	6.23408	2849	8.0	7.08723	1083	13.0	7.51128	671
3.1	6.26257	2759	8.1	7.09806	1069	13.1	7.51799	667
3.2	6.29016	2674	8.2	7.10875	1056	13.2	7.52466	661
3.3	6.31690	2595	8.3	7.11931	1044	13.3	7.53127	657
3.4	6.34285	2519	8.4	7.12975	1032	13.4	7.53784	651
3.5	6.36804	2449	8.5	7.14007	1020	13.5	7.54435	648
3.6	6.39253	2381	8.6	7.15027	1008	13.6	7.55083	642
3.7	6.41634	2318	8.7	7.16035	996	13.7	7.55725	638
3.8	6.43952	2258	8.8	7.17031	986	13.8	7.56363	633
3.9	6.46210	2201	8.9	7.18017	974	13.9	7.56996	629
4.0	6.48411	2146	9.0	7.18991	964	14.0	7.57625	625
4.1	6.50557	2095	9.1	7.19955	953	14.1	7.58250	620
4.2	6.52652	2046	9.2	7.20908	944	14.2	7.58870	616
4.3	6.54698	1999	9.3	7.21852	933	14.3	7.59486	612
4.4	6.56697	1954	9.4	7.22785	923	14.4	7.60098	607
4.5	6.58651	1911	9.5	7.23708	914	14.5	7.60705	604
4.6	6.60562	1870	9.6	7.24622	904	14.6	7.61309	599
4.7	6.62432	1831	9.7	7.25526	895	14.7	7.61908	596
4.8	6.64263	1793	9.8	7.26421	887	14.8	7.62504	591
4.9	6.66056	1757	9.9	7.27308	877	14.9	7.63095	588
5.0	6.67813	1722	10.0	7.28185	869	15.0	7.63683	584

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
15.0	7.63683	584	20.0	7.89068	443	25.0	8.08971	359
15.1	7.64267	580	20.1	7.89511	440	25.1	8.09330	357
15.2	7.64847	577	20.2	7.89951	438	25.2	8.09687	356
15.3	7.65424	572	20.3	7.90389	436	25.3	8.10043	354
15.4	7.65996	570	20.4	7.90825	434	25.4	8.10397	354
15.5	7.66566	565	20.5	7.91259	433	25.5	8.10751	351
15.6	7.67131	562	20.6	7.91692	430	25.6	8.11102	351
15.7	7.67693	559	20.7	7.92122	428	25.7	8.11453	350
15.8	7.68252	555	20.8	7.92550	426	25.8	8.11803	348
15.9	7.68807	552	20.9	7.92976	424	25.9	8.12151	347
16.0	7.69359	548	21.0	7.93400	423	26.0	8.12498	345
16.1	7.69907	545	21.1	7.93823	420	26.1	8.12843	345
16.2	7.70452	542	21.2	7.94243	418	26.2	8.13188	343
16.3	7.70994	539	21.3	7.94661	417	26.3	8.13531	342
16.4	7.71533	535	21.4	7.95078	415	26.4	8.13873	341
16.5	7.72068	533	21.5	7.95493	413	26.5	8.14214	340
16.6	7.72601	529	21.6	7.95906	411	26.6	8.14554	338
16.7	7.73130	526	21.7	7.96317	409	26.7	8.14892	338
16.8	7.73656	523	21.8	7.96726	408	26.8	8.15230	336
16.9	7.74179	520	21.9	7.97134	406	26.9	8.15566	335
17.0	7.74699	517	22.0	7.97540	404	27.0	8.15901	334
17.1	7.75216	515	22.1	7.97944	402	27.1	8.16235	333
17.2	7.75731	511	22.2	7.98346	401	27.2	8.16568	331
17.3	7.76242	508	22.3	7.98747	399	27.3	8.16899	331
17.4	7.76750	507	22.4	7.99146	397	27.4	8.17230	329
17.5	7.77257	502	22.5	7.99543	396	27.5	8.17559	329
17.6	7.77759	500	22.6	7.99939	394	27.6	8.17888	327
17.7	7.78259	498	22.7	8.00333	392	27.7	8.18215	326
17.8	7.78757	494	22.8	8.00725	391	27.8	8.18541	325
17.9	7.79251	492	22.9	8.01116	389	27.9	8.18866	324
18.0	7.79743	490	23.0	8.01505	388	28.0	8.19190	323
18.1	7.80233	487	23.1	8.01893	386	28.1	8.19513	322
18.2	7.80720	484	23.2	8.02279	384	28.2	8.19835	321
18.3	7.81204	482	23.3	8.02663	383	28.3	8.20156	320
18.4	7.81686	479	23.4	8.03046	381	28.4	8.20476	319
18.5	7.82165	476	23.5	8.03427	380	28.5	8.20795	318
18.6	7.82641	475	23.6	8.03807	378	28.6	8.21113	317
18.7	7.83116	471	23.7	8.04185	377	28.7	8.21430	315
18.8	7.83587	470	23.8	8.04562	375	28.8	8.21745	315
18.9	7.84057	467	23.9	8.04937	374	28.9	8.22060	314
19.0	7.84524	464	24.0	8.05311	372	29.0	8.22374	313
19.1	7.84988	463	24.1	8.05683	371	29.1	8.22687	312
19.2	7.85451	460	24.2	8.06054	370	29.2	8.22999	311
19.3	7.85911	457	24.3	8.06424	368	29.3	8.23310	310
19.4	7.86368	456	24.4	8.06792	367	29.4	8.23620	309
19.5	7.86824	453	24.5	8.07159	365	29.5	8.23929	308
19.6	7.87277	451	24.6	8.07524	364	29.6	8.24237	307
19.7	7.87728	449	24.7	8.07888	362	29.7	8.24544	306
19.8	7.88177	447	24.8	8.08250	361	29.8	8.24850	306
19.0	7.88624	444	24.9	8.08611	360	29.9	8.25156	305
20.9	7.89068	443	25.0	8.08971	359	30.0	8.25461	303

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
30.0	8.25461	303	35.0	8.39646	265	40.0	8.52199	238
30.1	8.25764	303	35.1	8.39911	265	40.1	8.52437	237
30.2	8.26067	301	35.2	8.40176	264	40.2	8.52674	237
30.3	8.26368	301	35.3	8.40440	264	40.3	8.52911	236
30.4	8.26669	301	35.4	8.40704	262	40.4	8.53147	236
30.5	8.26970	301	35.5	8.40966	262	40.5	8.53383	235
30.6	8.27268	298	35.6	8.41228	262	40.6	8.53618	235
30.7	8.27567	297	35.7	8.41490	261	40.7	8.53853	235
30.8	8.27864	296	35.8	8.41751	260	40.8	8.54088	234
30.9	8.28160	296	35.9	8.42011	260	40.9	8.54322	233
31.0	8.28456	295	36.0	8.42271	259	41.0	8.54555	233
31.1	8.28751	294	36.1	8.42530	258	41.1	8.54788	233
31.2	8.29045	293	36.2	8.42788	258	41.2	8.55021	233
31.3	8.29338	292	36.3	8.43046	257	41.3	8.55254	232
31.4	8.29630	292	36.4	8.43303	257	41.4	8.55486	231
31.5	8.29922	290	36.5	8.43560	256	41.5	8.55717	231
31.6	8.30212	290	36.6	8.43816	256	41.6	8.55948	230
31.7	8.30502	289	36.7	8.44072	255	41.7	8.56178	230
31.8	8.30791	288	36.8	8.44327	254	41.8	8.56408	230
31.9	8.31079	288	36.9	8.44581	254	41.9	8.56638	229
32.0	8.31367	287	37.0	8.44835	253	42.0	8.56867	229
32.1	8.31654	286	37.1	8.45088	253	42.1	8.57096	229
32.2	8.31940	285	37.2	8.45341	252	42.2	8.57325	228
32.3	8.32225	284	37.3	8.45593	251	42.3	8.57553	227
32.4	8.32509	283	37.4	8.45844	251	42.4	8.57780	227
32.5	8.32792	283	37.5	8.46095	251	42.5	8.58007	227
32.6	8.33075	282	37.6	8.46346	250	42.6	8.58234	227
32.7	8.33357	281	37.7	8.46596	249	42.7	8.58461	226
32.8	8.33638	281	37.8	8.46845	249	42.8	8.58687	225
32.9	8.33919	280	37.9	8.47094	248	42.9	8.58912	225
33.0	8.34199	279	38.0	8.47342	248	43.0	8.59137	225
33.1	8.34478	278	38.1	8.47590	247	43.1	8.59362	225
33.2	8.34756	278	38.2	8.47837	247	43.2	8.59587	224
33.3	8.35034	277	38.3	8.48084	246	43.3	8.59811	224
33.4	8.35311	276	38.4	8.48330	245	43.4	8.60035	223
33.5	8.35587	275	38.5	8.48575	245	43.5	8.60258	223
33.6	8.35862	275	38.6	8.48820	245	43.6	8.60481	222
33.7	8.36137	274	38.7	8.49065	244	43.7	8.60703	222
33.8	8.36411	273	38.8	8.49309	244	43.8	8.60925	222
33.9	8.36684	273	38.9	8.49553	243	43.9	8.61147	221
34.0	8.36957	272	39.0	8.49796	242	44.0	8.61368	221
34.1	8.37229	271	39.1	8.50038	242	44.1	8.61589	221
34.2	8.37500	271	39.2	8.50280	242	44.2	8.61810	221
34.3	8.37771	270	39.3	8.50522	241	44.3	8.62031	220
34.4	8.38041	269	39.4	8.50763	240	44.4	8.62251	219
34.5	8.38310	269	39.5	8.51003	240	44.5	8.62470	219
34.6	8.38579	268	39.6	8.51243	240	44.6	8.62689	219
34.7	8.38847	267	39.7	8.51483	239	44.7	8.62908	219
34.8	8.39114	266	39.8	8.51722	239	44.8	8.63127	218
34.9	8.39380	266	39.9	8.51961	238	44.9	8.63345	218
35.0	8.39646	265	40.0	8.52199	238	45.0	8.63563	217

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
45.0	8.63563	217	50.0	8.74052	203	55.0	8.83912	192
45.1	8.63780	217	50.1	8.74255	202	55.1	8.84104	192
45.2	8.63997	217	50.2	8.74457	202	55.2	8.84296	192
45.3	8.64214	216	50.3	8.74659	202	55.3	8.84488	191
45.4	8.64430	216	50.4	8.74861	202	55.4	8.84679	192
45.5	8.64646	216	50.5	8.75063	201	55.5	8.84871	191
45.6	8.64862	215	50.6	8.75264	201	55.6	8.85062	192
45.7	8.65077	215	50.7	8.75465	201	55.7	8.85254	191
45.8	8.65292	215	50.8	8.75666	201	55.8	8.85445	190
45.9	8.65507	215	50.9	8.75867	201	55.9	8.85635	191
46.0	8.65722	214	51.0	8.76068	200	56.0	8.85826	191
46.1	8.65936	214	51.1	8.76268	200	56.1	8.86017	190
46.2	8.66150	213	51.2	8.76468	199	56.2	8.86207	191
46.3	8.66363	213	51.3	8.76667	200	56.3	8.86398	190
46.4	8.66576	213	51.4	8.76867	199	56.4	8.86588	190
46.5	8.66789	212	51.5	8.77066	199	56.5	8.86778	190
46.6	8.67001	212	51.6	8.77265	199	56.6	8.86968	189
46.7	8.67213	212	51.7	8.77464	199	56.7	8.87157	190
46.8	8.67425	212	51.8	8.77663	198	56.8	8.87347	189
46.9	8.67637	211	51.9	8.77861	198	56.9	8.87536	190
47.0	8.67848	211	52.0	8.78059	198	57.0	8.87726	189
47.1	8.68059	211	52.1	8.78257	198	57.1	8.87915	189
47.2	8.68270	210	52.2	8.78455	198	57.2	8.88104	189
47.3	8.68480	210	52.3	8.78653	197	57.3	8.88293	188
47.4	8.68690	210	52.4	8.78850	197	57.4	8.88481	189
47.5	8.68900	209	52.5	8.79047	197	57.5	8.88670	188
47.6	8.69109	209	52.6	8.79244	197	57.6	8.88858	189
47.7	8.69318	209	52.7	8.79441	196	57.7	8.89047	188
47.8	8.69527	209	52.8	8.79637	197	57.8	8.89235	188
47.9	8.69736	208	52.9	8.79834	196	57.9	8.89423	188
48.0	8.69944	208	53.0	8.80030	196	58.0	8.89611	188
48.1	8.70152	208	53.1	8.80226	195	58.1	8.89799	188
48.2	8.70360	207	53.2	8.80421	196	58.2	8.89987	187
48.3	8.70567	207	53.3	8.80617	195	58.3	8.90174	188
48.4	8.70774	207	53.4	8.80812	195	58.4	8.90362	187
48.5	8.70981	207	53.5	8.81007	195	58.5	8.90549	187
48.6	8.71188	206	53.6	8.81202	195	58.6	8.90736	187
48.7	8.71394	207	53.7	8.81397	194	58.7	8.90923	187
48.8	8.71601	205	53.8	8.81591	194	58.8	8.91110	187
48.9	8.71806	205	53.9	8.81785	194	58.9	8.91297	187
49.0	8.72011	206	54.0	8.81979	195	59.0	8.91484	187
49.1	8.72217	205	54.1	8.82174	194	59.1	8.91671	186
49.2	8.72422	204	54.2	8.82368	193	59.2	8.91857	187
49.3	8.72626	205	54.3	8.82561	194	59.3	8.92044	186
49.4	8.72831	204	54.4	8.82755	193	59.4	8.92230	186
49.5	8.73035	204	54.5	8.82948	193	59.5	8.92416	187
49.6	8.73239	204	54.6	8.83141	193	59.6	8.92603	186
49.7	8.73443	203	54.7	8.83334	193	59.7	8.92789	186
49.8	8.73646	203	54.8	8.83527	192	59.8	8.92975	186
49.9	8.73849	203	54.9	8.83719	193	59.9	8.93161	186
50.0	8.74052	203	55.0	8.83912	192	60.0	8.93347	185

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
60.0	8.93347	185	65.0	9.02553	183	70.0	9.11748	185
60.1	8.93532	186	65.1	9.02736	183	70.1	9.11933	186
60.2	8.93718	185	65.2	9.02919	183	70.2	9.12119	186
60.3	8.93903	186	65.3	9.03102	183	70.3	9.12305	186
60.4	8.94089	185	65.4	9.03285	184	70.4	9.12491	186
60.5	8.94274	185	65.5	9.03469	183	70.5	9.12677	186
60.6	8.94459	186	65.6	9.03652	183	70.6	9.12863	186
60.7	8.94645	185	65.7	9.03835	183	70.7	9.13049	187
60.8	8.94830	185	65.8	9.04018	184	70.8	9.13236	186
60.9	8.95015	185	65.9	9.04202	183	70.9	9.13422	187
61.0	8.95200	185	66.0	9.04385	183	71.0	9.13609	187
61.1	8.95385	184	66.1	9.04568	183	71.1	9.13796	187
61.2	8.95569	185	66.2	9.04751	183	71.2	9.13983	187
61.3	8.95754	185	66.3	9.04934	184	71.3	9.14170	187
61.4	8.95939	184	66.4	9.05118	183	71.4	9.14357	187
61.5	8.96123	185	66.5	9.05301	183	71.5	9.14544	188
61.6	8.96308	184	66.6	9.05484	184	71.6	9.14732	188
61.7	8.96492	185	66.7	9.05668	183	71.7	9.14920	188
61.8	8.96677	184	66.8	9.05851	184	71.8	9.15108	188
61.9	8.96861	184	66.9	9.06035	183	71.9	9.15296	188
62.0	8.97045	184	67.0	9.06218	184	72.0	9.15484	188
62.1	8.97229	185	67.1	9.06402	183	72.1	9.15672	189
62.2	8.97414	184	67.2	9.06585	184	72.2	9.15861	189
62.3	8.97598	184	67.3	9.06769	183	72.3	9.16050	189
62.4	8.97782	184	67.4	9.06952	184	72.4	9.16239	189
62.5	8.97966	184	67.5	9.07136	184	72.5	9.16428	189
62.6	8.98150	183	67.6	9.07320	183	72.6	9.16617	189
62.7	8.98333	184	67.7	9.07503	184	72.7	9.16806	190
62.8	8.98517	184	67.8	9.07687	184	72.8	9.16996	190
62.9	8.98701	184	67.9	9.07871	184	72.9	9.17186	190
63.0	8.98885	184	68.0	9.08055	184	73.0	9.17376	190
63.1	8.99069	183	68.1	9.08239	184	73.1	9.17566	191
63.2	8.99252	184	68.2	9.08423	184	73.2	9.17757	191
63.3	8.99436	183	68.3	9.08607	184	73.3	9.17948	191
63.4	8.99619	184	68.4	9.08791	184	73.4	9.18139	191
63.5	8.99803	183	68.5	9.08975	184	73.5	9.18330	191
63.6	8.99986	184	68.6	9.09159	185	73.6	9.18521	192
63.7	9.00170	183	68.7	9.09344	184	73.7	9.18713	192
63.8	9.00353	184	68.8	9.09528	185	73.8	9.18905	192
63.9	9.00537	183	68.9	9.09713	184	73.9	9.19097	192
64.0	9.00720	183	69.0	9.09897	185	74.0	9.19289	193
64.1	9.00903	184	69.1	9.10082	185	74.1	9.19482	193
64.2	9.01087	183	69.2	9.10267	184	74.2	9.19675	193
64.3	9.01270	183	69.3	9.10451	185	74.3	9.19868	193
64.4	9.01453	184	69.4	9.10636	185	74.4	9.20061	194
64.5	9.01637	183	69.5	9.10821	185	74.5	9.20255	194
64.6	9.01820	183	69.6	9.11006	185	74.6	9.20449	194
64.7	9 02003	183	69.7	9.11191	186	74.7	9.20643	195
64.8	9.02186	183	69.8	9.11377	185	74.8	9.20838	195
64.9	9.02369	184	69.9	9.11562	186	74.9	9.21033	195
65.0	9.02553	183	70.0	9.11748	185	75.0	9.21228	195

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
75.0	9.21228	195	80.0	9.31515	220	85.0	9.43962	296
75.1	9.21423	196	80.1	9.31735	222	85.1	9.44256	298
75.2	9.21619	196	80.2	9.31957	222	85.2	9.44554	301
75.3	9.21815	196	80.3	9.32179	222	85.3	9.44855	304
75.4	9.22011	197	80.4	9.32401	224	85.4	9.45159	307
75.5	9.22208	197	80.5	9.32625	224	85.5	9.45466	310
75.6	9.22405	197	80.6	9.32849	225	85.6	9.45776	314
75.7	9.22602	198	80.7	9.33074	227	85.7	9.46090	318
75.8	9.22800	198	80.8	9.33301	227	85.8	9.46408	321
75.9	9.22998	198	80.9	9.33528	228	85.9	9.46729	325
76.0	9.23196	199	81.0	9.33756	229	86.0	9.47054	329
76.1	9.23395	199	81.1	9.33985	230	86.1	9.47383	334
76.2	9.23594	200	81.2	9.34215	230	86.2	9.47717	338
75.3	9.23794	200	81.3	9.34445	232	86.3	9.48055	343
76.4	9.23994.	200	81.4	9.34677	233	86.4	9.48398	348
76.5	9.24194	201	81.5	9.34910	234	86.5	9.48746	353
76.6	9.24395	201	81.6	9.35144	235	86.6	9.49099	359
76.7	9.24596	201	81.7	9.35379	236	86.7	9.49458	364
76.8	9.24797	202	81.8	9.35615	238	86.8	9.49822	370
76.9	9.24999	203	81.9	9.35853	238	86.9	9.50192	377
77.0	9.25202	202	82.0	9.36091	240	87.0	9.50569	384
77.1	9.25404	204	82.1	9.36331	240	87.1	9.50953	391
77.2	9.25608	203	82.2	9.36571	242	87.2	9.51344	398
77.3	9.25811	204	82.3	9.36813	244	87.3	9.51742	407
77.4	9.26015	205	82.4	9,37057	244	87.4	9.52149	416
77.5	9.26220	205	82.5	9.37301	246	87.5	9.52565	425
77.6	9.26425	206	82.6	9.37547	247	87.6	9.52990	435
77.7	9.26631	206	82.7	9.37794	249	87.7	9.53425	445
77.8	9.26837	206	82.8	9.38043	250	87.8	9.53870	458
77.9	9.27043	207	82.9	9.38293	252	87.9	9.54328	470
78.0	9.27250	208	83.0	9.38545	253	88.0	9.54798	484
78.1	9.27458	208	83.1	9.38798	255	88.1	9.55282	499
78.2	9.27666	209	83.2	9.39053	256	88.2	9.55781	515
78.3	9.27875	209	83.3	9.39309	258	88.3	9.56296	534
78.4	9.28084	210	83.4	9.39567	260	88.4	9.56830	554
78.5	9.28294	210	83.5	9.39827	261	88.5	9.57384	577
78.6	9.28504	211	83.6	9.40088	263	88.6	9.57961	602
78.7	9.28715	211	83.7	9.40351	265	88.7	9.58563	632
78.8	9.28926	212	83.8	9.40616	267	88.8	9.59195	665
78.9	9.29138	213	83.9	9.40883	269	88.9	9.59860	704
79.0	9.29351	214	84.0	9.41152	271	89.0	9.60564	750
79.1	9.29565	214	84.1	9.41423	273	89.1	9.61314	805
79.2	9.29779	214	84.2	9.41696	275	89.2	9.62119	874
79.3	9.29993	215	84.3	9.41971	277	89.3	9.62993	959
79.4	9.30208	216	84.4	9.42248	279	89.4	9.63952	1073
79.5	9.30424	217	84.5	9.42527	282.	89.5	9.65025	1229
79.6	9.30641	218	84.6	9.42809	284	89.6	9.66254	1462
79.7	9.30859	218	84.7	9.43093	287	89.7	9.67716	1859
79.8	9.31077	219	84.8	9.43380	290	89.8	9.69575	2725
79.9	9.31296	219	84.9	9.43670	292	89.9	9.72300	27700
80.0	9.31515	220	85.0	9.43962	294	90.0	10.00000	

8.

Sur l'elimination des noeuds dans le problème des trois corps.

(Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. des math. à l'université de Königsberg.)

(Extrait du compte rendu des séances de l'académie des sciences de Paris, séance du lundi 8. Août 1842.)

Les illustres géomètres du siècle passé, en traitant le problème des trois corps, ont cherché le mouvement de deux d'entre eux autour du troisième ou autour du centre de gravité de tous les trois. Mais, en réduisant de cette manière le problème de trois corps qui s'attirent mutuellement à un problème de deux corps qui se meuvent autour d'un point fixe, on fait perdre aux équations différentielles du problème cette forme précieuse dont elles jouissent dans leur état primitif, savoir, que les secondes différentielles des coordonnées soient égalées aux dérivées d'une même fonction. C'est par cette raison que les principes de la conservation des forces vives et des aires cessent d'avoir lieu par rapport aux deux corps. On pourra cependant éviter cet inconvénient en agissant de la manière suivante:

Supposons, pour plus de généralité, que le système se compose de n corps, du soleil et de $n-1$ planètes. Comme il est permis de supposer que son centre de gravité reste en repos, on aura une équation linéaire entre chacun des trois systèmes de coordonnées du même nom. Donc les n coordonnées parallèles à un même axe pourront être exprimées linéairement par $n-1$ autres quantités, en établissant $n-1$ équations de condition entre les $n(n-1)$ constantes qui entrent dans ces n expressions linéaires. Comme on peut disposer encore d'un nombre $(n-1)^2$ de constantes, on les déterminera de manière que, dans l'expression de la force vive du système, s'évanouissent les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ produits des différentielles premières des nouvelles variables. En se servant de formules parfaitement semblables pour chaque système de coordonnées du même nom, et en considérant les nouvelles variables comme les coordonnées de $n-1$ autres corps, *on aura réduit de cette manière la force vive du système des n corps proposés à celle d'un système de n — 1 corps*, des masses convenables étant attribuées à ces derniers. Il y aura même dans les formules de ré-

duction un nombre $\frac{1}{2}n(n-1)$ de constantes arbitraires et dont on pourra profiter de différentes manières.

D'après ce qu'on vient de dire, le principe de la conservation des forces vives donnera une équation dans laquelle la somme des forces vives des $n-1$ corps fictifs sera égalée à une fonction de leurs coordonnées. En se servant des règles générales de *Lagrange*, on en déduira, par de simples différentiations partielles, les équations différentielles du problème réduit, et l'on reconnaîtra aisément que la conservation des aires a lieu dans le mouvement des $n-1$ corps par lesquels on a remplacé le système proposé. Ces $n-1$ corps ne s'écartent d'ailleurs de $n-1$ planetes que de pétites quantités de l'ordre des forces perturbatrices, de manière que la première approximation peut être la même pour les uns et pour les autres. Le changement que, dans cette analyse, doit subir l'expression de la force perturbatrice n'augmente pas la difficulté de son développement.

En appliquant la méthode que je viens d'exposer au problème des trois corps, on réduit celui-ci à un problème du mouvement de deux corps qui jouit de propriétés remarquables. En effet, les trois équations fournies par la conservation des aires font voir:

1°. Que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps reste constamment dans un plan fixe: c'est le plan invariable du systeme;

2°. Que les inclinaisons des plans des deux orbites à ce plan fixe et les paramètres de ces orbites regardés comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres.

Choisissons pour variables du problème les inclinaisons des deux orbites au plan invariable, les deux rayons vecteurs, les angles qu'ils forment avec l'intersection commune des plans des deux orbites, enfin l'angle que forme cette intersection située, comme on a vu, dans le plan invariable, avec une droite fixe de ce plan. On trouvera *que ce dernier angle disparaît entièrement du système des équations différentielles et se détermine après leur intégration par une quadrature.* Donc, dans cette nouvelle forme des équations différentielles n'entre aucune trace des noeuds. Les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps, s'y trouvent réduites à cinq équations du premier ordre et une seule du second. Par suite, l'on a fait cinq intégrations. Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra donc diro

que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde. Je dis dans le système du monde, puisque la même méthode s'applique à un nombre quelconque de corps.

ANALYSE.

1. Soient m la masse du Soleil, m_1 et m_2 celles des deux planètes; soient ξ, v, ζ; ξ_1, v_1, ζ_1; ξ_2, v_2, ζ_2 les coordonnées rectangulaires des trois corps m, m_1, m_2, rapportées à leur centre de gravité. Comme on a les trois équations

$$1.\quad \begin{cases} m\xi+m_1\xi_1+m_2\xi_2 = 0, \\ mv+m_1v_1+m_2v_2 = 0, \\ m\zeta+m_1\zeta_1+m_2\zeta_2 = 0, \end{cases}$$

il sera permis de faire

$$2.\quad \begin{cases} \xi = \alpha x+\beta x_1, & v = \alpha y+\beta y_1, & \zeta = \alpha z+\beta z_1, \\ \xi_1 = \alpha_1 x+\beta_1 x_1, & v_1 = \alpha_1 y+\beta_1 y_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z+\beta_1 z_1, \\ \xi_2 = \alpha_2 x+\beta_2 x_1, & v_2 = \alpha_2 y+\beta_2 y_2, & \zeta_2 = \alpha_2 z+\beta_2 z_1, \end{cases}$$

les six constantes α, β, etc., devant satisfaire aux deux conditions

$$3.\quad \begin{cases} m\alpha+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta+m_1\beta_1+m_2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Supposons de plus que, par les substitutions (2.), la somme des forces vives du système $2T$ se change en cette expression

$$4.\quad \begin{cases} 2T = \mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad +\mu_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right], \end{cases}$$

on aura les trois équations

$$5.\quad \begin{cases} \mu = m\alpha\alpha+m_1\alpha_1\alpha_1+m_2\alpha_2\alpha_2, \\ \mu_1 = m\beta\beta+m_1\beta_1\beta_1+m_2\beta_2\beta_2, \\ 0 = m\alpha\beta+m_1\alpha_1\beta_1+m_2\alpha_2\beta_2, \end{cases}$$

J'observe qu'en vertu des formules (3.) on peut faire

$$6.\quad \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 = \varepsilon.m,\quad \alpha_2\beta-\alpha\beta_2 = \varepsilon.m_1,\quad \alpha\beta_1-\alpha_1\beta = \varepsilon.m_2,$$

ε étant un facteur indéterminé. Des formules (5.) et (6.) on tire aussi celle-ci:

$$7.\quad \mu\mu_1 = mm_1m_2(m+m_1+m_2)\varepsilon\varepsilon.$$

Si l'on fait

$$8.\quad \begin{cases} xx+yy+zz = rr, \quad x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1 = r_1r_1, \\ \qquad xx_1+yy_1+zz_1 = rr_1\cos U, \end{cases}$$

on aura

$$9.\quad \begin{cases} \varrho\varrho = (\xi_1-\xi_2)^2+(v_1-v_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2 \\ \quad = \gamma^2 rr+2\gamma\delta rr_1\cos U+\delta^2 r_1r_1, \\ \varrho_1\varrho_1 = (\xi_2-\xi)^2+(v_2-v)^2+(\xi_2-\zeta)^2 \\ \quad = \gamma_1^2 rr+2\gamma_1\delta_1 rr_1\cos U+\delta_1^2 r_1r_1, \\ \varrho_2\varrho_2 = (\xi-\xi_1)^2+(v-v_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2 \\ \quad = \gamma_2^2 rr+2\gamma_2\delta_2 rr_1\cos U+\delta_2^2 r_1r_1, \end{cases}$$

où l'on a mis, pour plus de simplicité,

$$10.\quad \begin{cases} \gamma = \alpha_1-\alpha_2, & \delta = \beta_1-\beta_2, \\ \gamma_1 = \alpha_2-\alpha, & \delta_1 = \beta_2-\beta, \\ \gamma_2 = \alpha-\alpha_1, & \delta_2 = \beta-\beta_1, \end{cases}$$

ce qui donne

$$11.\quad \gamma+\gamma_1+\gamma_2 = 0, \quad \delta+\delta_1+\delta_2 = 0.$$

Si l'on met

$$U = \frac{mm_1}{\varrho_2}+\frac{mm_2}{\varrho_1}+\frac{m_1m_2}{\varrho} = \Sigma\frac{m_1m_2}{\varrho},$$

le principe des forces vives fournit léquation

$$12.\quad T = U-h = \Sigma\frac{m_1m_2}{\varrho}-h,$$

h étant une constante arbitraire. Or, si dans cette équation l'on substitue les valeurs des quantités T, ϱ, ϱ_1, ϱ_2 tirées des formules (4.) et (9.), on aura tout de suite, par les règles générales données par *Lagrange* dans sa *Mécanique analytique,*

$$13.\quad \begin{cases} \mu\frac{d^2x}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma x+\delta x_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dx}, \\ \mu\frac{d^2y}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma y+\delta y_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dy}, \\ \mu\frac{d^2z}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma z+\delta z_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dz}, \\ \mu_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma x+\delta x_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dx_1}, \\ \mu_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma y+\delta y_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dy_1}, \\ \mu_1\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma z+\delta z_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dz_1}. \end{cases}$$

On tire de ces formules les suivantes:

$$14.\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\mu_1\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) \\ \qquad = -(yz_1-zy_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}, \\ \mu\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = -\mu_1\left(z_1\frac{d^2x_1}{dt^2}-x_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) \\ \qquad = -(zx_1-xz_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}, \\ \mu\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\mu_1\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right) \\ \qquad = -(xy_1-yx_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}. \end{cases}$$

Ces équations donnent les trois intégrales

$$15.\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\mu_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right) = c, \\ \mu\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\mu_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right) = c_1, \\ \mu\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\mu_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right) = c_2, \end{cases}$$

c, c_1, c_2, étant des constantes arbitraires. Je remarque à cette occasion les formules

$$16.\quad \begin{cases} \mu\left(y_1\frac{d^2z}{dt^2}-z_1\frac{d^2y}{dt^2}\right) = +(yz_1-zy_1)\Sigma\frac{mm_1\gamma\gamma}{\varrho^3}, \\ \mu_1\left(y\frac{d^2z_1}{dt^2}-z\frac{d^2y_1}{dt}\right) = -(yz_1-zy_1)\Sigma\frac{mm_1\delta\delta}{\varrho^3}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$17.\quad \begin{cases} \mu\mu_1\frac{d\left(y_1\frac{dz}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}+y\frac{dz_1}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}\right)}{dt} \\ = (yz_1-zy_1)\Sigma\frac{m_1m_2(\mu_1\gamma\gamma-\mu\delta\delta)}{\varrho^3}. \end{cases}$$

On a deux autres systèmes de formules semblables à celui des formules (16.) et (17.), et qui se rapportent aux coordonnées z et x et aux coordonnées x et y.

D'après une propriété connue des fonctions homogènes, il suit des formules (13.)

$$18.\quad \left.\begin{array}{l} \mu\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right) \\ +\mu_1\left(x_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+y_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+z_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) \end{array}\right\} = -U.$$

Donc, en faisant usage des formules (4.) et (12.), on obtient la suivante:

$$19.\qquad \frac{d^2(\mu rr+\mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2(U-2h).$$

Les six équations (13.) pourront servir à déterminer les six quantités x, y, etc., en fonction du temps. Mais on pourra aussi choisir pour cet effet six autres équations indépendantes entre elles et qui se déduisent des équations (13.) par des combinaisons différentes, par exemple, les quatre équations (12.) et (15.), une des équations (14.) et l'équation (19.). En effet, on reviendra sans peine de ces dernières aux équations (13.).

On déterminera α, β, etc., par les quantités γ, δ, etc., au moyen des formules

$$20.\qquad \begin{cases} M\alpha\ = m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1, & M\beta = m_1\delta_2 - m_2\delta_1, \\ M\alpha_1 = m_2\gamma - m\gamma_2, & M\beta_1 = m_2\delta - m\delta_2, \\ M\alpha_2 = m\gamma_1 - m_1\gamma, & M\beta_2 = m\delta_1 - m_1\delta, \end{cases}$$

où $M = m+m_1+m_2$. Ces formules étant substituées dans (5.), on aura

$$21.\qquad \begin{cases} M\mu\ = m_1 m_2\gamma\gamma + m_2 m\gamma_1\gamma_1 + mm_1\gamma_2\gamma_2, \\ M\mu_1 = m_1 m_2\delta\delta + m_2 m\delta_1\delta_1 + mm_1\delta_2\delta_2, \\ \quad 0 = m_1 m_2\gamma\delta + m_2 m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2, \end{cases}$$

formules analogues aux équations (5.)

2. Je veux discuter à présent la grandeur des différentes constantes qui entrent dans les formules précédentes. Ces constantes n'étant pas entièrement déterminées, il s'agira de faire telles suppositions sur leur grandeur respective qui pourront subsister avec les équstions de condition établies entre ces constantes et qui permettront en même temps de faire usage des méthodes d'approximation connues.

Les équations de condition que l'on a établies entre les constantes α, β, etc., sont les suivantes:

$$1.\qquad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0, \\ m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 = 0, \end{cases}$$

celles que l'on a entre les six constantes γ, δ, etc., seront

$$2.\qquad \begin{cases} \gamma+\gamma_1+\gamma_2 = 0, \\ \delta+\delta_1+\delta_1 = 0, \\ m_1 m_2\gamma\delta + m_2 m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2 = 0. \end{cases}$$

Les masses des planétes étant très-petites par rapport au Soleil, les frac-

tions $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$ seront des quantités très-petites du premier ordre. Cela posé, les équations (1.) font voir qu'il est permis de supposer α_1 et β_2 très-proches de l'unité, pendant que les constantes α, α_1, β, β_1 seront des quantités du premier ordre. En effet, si l'on fait

$$3.\qquad \alpha_2 = \frac{m_1\zeta}{m}, \qquad \beta_1 = \frac{m_2\eta}{m},$$

on tirera des équations (1.) les formules approchées,

$$4.\qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{m_1}{m}, \quad \alpha_1 = 1, \quad 1+\eta+\zeta = 0, \\ \beta = -\frac{m_2}{m}, \quad \beta_2 = 1, \end{cases}$$

d'où l'on tire les valeurs approchées correspondantes des quantités γ, δ, etc.,

$$5.\qquad \begin{cases} \gamma = 1, \quad \gamma_1 = -\frac{m_1}{m}\eta, \quad \gamma_2 = -1, \\ \delta = -1, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \frac{m_2}{m}\zeta. \end{cases}$$

Enfin les quantités μ et μ_1 s'écarteront peu des masses m_1 et m_2. Tous les écarts de ces valeurs approchées avec les véritables valeurs pourront être supposés de l'ordre des forces perturbatrices.

Il suit des considérations précédentes, que les quantités x, y, z ne s'écarteront de ξ_1, v_1, ζ_1, et que les quantités x_1, y_1, z_1 ne s'écarteront de ξ_2, v_2, ζ_2 que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. Donc, si l'on imagine deux corps dont les coordonnées respectives sont x, y, z, et x_1, y_1, z_1, leur mouvement autour du centre de gravité du système des trois corps pourra, en première approximation, être regardé comme elliptique. La même chose aura lieu si le mouvement est rapporté à tout autre point qui ne s'écarte de ce centre que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. En négligeant ces quantités, on déduit des formules (3.) et (13.) du n° 1. les équations différentielles qui servent à la première approximation, et que l'on intégrera par les formules elliptiques connues,

$$6.\qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{x}{r^3}, & \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{x_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{y}{r^3}, & \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{y_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{z}{r^3}, & \frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{z_1}{r_1^3}, \end{cases}$$

où les facteurs $-\frac{m_1}{\gamma_2\mu}$, $\frac{m^2}{\delta_1\mu_1}$ ne s'écartent de l'unité que de quantités du

premier ordre par rapport aux forces pertubatrices. Si l'une des deux planètes, par exemple la seconde, est beaucoup plus éloignée du Soleil que l'autre, il conviendra de substituer aux trois dernières de ces équations celles-ci:

$$7. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1} - \frac{m_1}{\delta}\right)\frac{x_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1} - \frac{m_1}{\delta}\right)\frac{y_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1} - \frac{m_1}{\delta}\right)\frac{z_1}{r_1^3}, \end{cases}$$

Dans les approximations successives l'on pourra laisser indéterminées les quantités μ, μ_1, γ, δ, etc.; seulement il sera bon de fixer la valeur de la quantité $\frac{\delta}{\gamma}$. Si l'on fait exactement $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 = 1$, $\delta = \beta_1 - \beta_2 = -1$, on aura

$$8. \quad \xi_1 - \xi_2 = x - x_1, \quad v_1 - v_2 = y - y_1, \quad \zeta_1 - \zeta_2 = z - z_1.$$

Dans ce cas, on peut envisager les quantités x, y, z et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées des deux planètes elles-mêmes, mais rapportées à un autre point que le centre de gravité du système. En effet, on pourra faire, en même temps,

$$9. \quad \begin{cases} \xi_1 = x + a, \quad v_1 = y + b, \quad \zeta_1 = z + c, \\ \xi_2 = x_1 + a, \quad v_2 = y_1 + b, \quad \zeta_2 = z_1 + c, \end{cases}$$

a, b, c étant déterminées par les équations

$$10. \quad a = \alpha_2 x + \beta_1 x_1, \quad b = \alpha_2 y + \beta_1 y_1, \quad c = \alpha_2 z + \beta_1 z_1.$$

Or des équations

$$\xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1,$$

on tire

$$\alpha_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 = (\alpha_1 + \beta_1)\alpha_2 x + (\alpha_2 + \beta_2)\beta_1 x_1;$$

et comme on a $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$, on aura aussi

$$a = \frac{\alpha_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

On trouve de la même manière

$$b = \frac{\alpha_2 v_1 + \beta_1 v_2}{\alpha_1 + \beta_1}, \qquad c = \frac{\alpha_2 \zeta_1 + \beta_1 \zeta_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

Si l'on retranche des coordonnées a, ξ_1 et ξ_2 la même quantité

$$\frac{m\xi + m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{M},$$

M étant la somme des masses, on trouvera, après quelques réductions, la

valeur suivante de a, et de la même manière les valeurs ci-jointes de b et de c,

$$11.\quad \begin{cases} a = \dfrac{\xi+\gamma_1\xi_1-\delta_2\xi_2}{1+\gamma_1-\delta_2}, \\ b = \dfrac{v+\gamma_1 v_1-\delta_2 v_2}{1+\gamma_1-\delta_2}, \\ c = \dfrac{\zeta+\gamma_1\zeta_1-\delta_2\zeta_2}{1+\gamma_1-\delta_2}. \end{cases}$$

Les constantes γ_1 et δ_2 qui entrent dans ces formules pourront être des quantités quelconques remplissant l'équation de condition

$$12.\quad \left(\gamma_1-\frac{m_1}{m}\right)\left(\delta_2+\frac{m_2}{m}\right) = \frac{M}{m}\gamma_1\delta_2;$$

il sera donc, entre autres, permis de mettre

$$13.\quad \delta_2 = 0,\quad \gamma_1 = \frac{m_1}{m},\quad \text{ou}\quad \gamma_1 = 0,\quad \delta_2 = -\frac{m_2}{m}.$$

En supposant toujours

$$\gamma = -\delta = 1,$$

on aura encore

$$14.\quad \begin{cases} M\alpha = -[(m_1+m_2)\gamma_1+m_1], & M\beta = (m_1+m_2)\delta_2-m_1, \\ M\alpha_1 = m\gamma_1+m+m_2, & M\beta_1 = -[m\delta_2+m_2], \\ M\alpha_2 = m\gamma_1-m_1, & M\beta_2 = -m\delta_2+m+m_1, \\ \gamma_2 = -(1+\gamma_1), \quad \delta_1 = 1-\delta_2, & \\ \mu = mm_2\gamma_1\dfrac{1+\gamma_1-\delta_2}{m\delta_2+m_2} = \dfrac{m_2(m\gamma_1-m_1)}{M\delta_2}(1+\gamma_1-\delta_2), & \\ \mu_1 = mm_1\delta_2\dfrac{1+\gamma_1-\delta_2}{m\gamma_1-m_1} = \dfrac{m_1(m\delta_2+m_2)}{M\gamma_1}(1+\gamma_1-\delta_2). & \end{cases}$$

Les formules (11.) sont indépendantes de l'origine des coordonnées; elles font voir que le point autour duquel on suppose les deux planètes décrire des orbites elliptiques variables est le centre de gravité des trois corps, si l'on donne respectivement au Soleil, à la première et à la deuxième planète, les masses 1, γ_1, $-\delta_2$. Si l'on fait $\delta_2=0$, ce point deviendra le centre de gravité du Soleil et de la première planète, en leur attribuant leurs masses effectives m et m_1. On aura dans ce cas

$$15.\quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, \\ \beta = -\dfrac{m_1}{M}, & \beta_1 = -\dfrac{m_2}{M}, & \beta_2 = \dfrac{m+m_1}{M}, \\ \gamma = 1, & \gamma_1 = \dfrac{m_1}{m}, & \gamma_2 = -\left(1+\dfrac{m_1}{m}\right), \\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, & \delta_2 = 0, \\ \mu = m_1\left(1+\dfrac{m_1}{m}\right), & & \mu_1 = m_2\dfrac{m+m_1}{M}. \end{cases}$$

On voit donc qu'il faudra attribuer aux planètes des masses un peu différentes dont la raison n'est plus $\frac{m_1}{m_2}$, mais $\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{M}{m}$.

3. Ayant établi entre les quantités x, y, etc., les équations (6.) du n° 2., les corps dont les coordonnées sont x, y, z et x_1, y_1, z_1, décriront autour de l'origine des coordonnées comme foyer des orbites elliptiques. Nommons, par rapport au premier de ces corps,

$2a$ le grand axe de son orbite,

$2p$ le paramètre,

i l'inclinaison du plan de l'orbite à un plan fixe,

Ω la longitude du noeud ascendant du plan de l'orbite sur le plan fixe,

et notons d'un trait les mêmes quantités rapportées au deuxième corps; cela posé, on aura par les formules connues pour le mouvement elliptique d'une planète autour du Soleil,

$$1.\quad \begin{cases} x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{p}.\cos i, \\ y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt} = k\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega, \\ z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt} = -k\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega, \\ x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt} = k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1, \\ y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt} = k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1, \\ z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt} = -k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos\Omega_1, \end{cases}$$

ou l'on a

$$2.\quad kk = -\frac{1}{\gamma_2}\cdot\frac{mm_1}{\mu},\qquad k_1k_1 = \frac{1}{\delta_1}\cdot\frac{mm_2}{\mu_1},$$

et où pour le plan des x et y est pris le plan fixe, et pour l'axe des x la droite fixe de laquelle les noeuds ascendants sont comptés.

Pour le véritable mouvement donné par les équations (13.) du n° 1., on laisse subsister la forme des expressions elliptiques, en en faisant varier les éléments. Dans cette supposition, *l'on a entre les six éléments troubles* p, i, Ω, p_1, i_1, Ω_1, *trois équations au moyen desquelles on exprime immédiatement les trois quantités* $\sqrt{p_1}.\cos i_1$, $\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1$, $\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos\Omega_1$, *par les trois autres* $\sqrt{p}.\cos i$, $\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega$, $\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega$. En effet, en substituant les formules (1.) dans les formules (15.) du n° 1., l'on trouve

entre ces quantités les simples relations suivantes:

$$3.\quad \begin{cases} \mu k\sqrt{p}.\cos i+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1 = c_2, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1 = c, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos_1\Omega = c_1, \end{cases}$$

c, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires.

On sait que l'on peut disposer de la direction des axes des coordonnées de manière à faire évanouir deux des trois constantes c, c_1, c_2. Supposons donc

$$c = 0,\quad c_1 = 0,$$

le plan des x et y sera celui auquel *Laplace* a donné le nom de *plan invariable*. En faisant $c=c_1=0$, les équations (3.) se changent dans les suivantes,

$$4.\quad \begin{cases} \mu k\sqrt{p}.\cos i+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1 = c_2, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1 = 0, \\ \Omega = \Omega_1. \end{cases}$$

Les deux premières de ces formules font voir *que les inclinaisons des plans des deux orbites au plan invariable sont parfaitement déterminées par les deux paramètres,* et *vice versa.* Nommant $I=i_1-i$ l'inclinaison mutuelle des deux plans, on déterminera I par la formule

$$5.\quad 4\mu\mu_1 kk_1\sqrt{pp_1}.\sin I^2 = \{\mu k\sqrt{p}+\mu_1 k_1\sqrt{p_1}\}^2-c,$$

et ensuite on aura i et i_1 eux-mêmes par les formules

$$6.\quad \begin{cases} c_2\sin i_1 = \mu k\sqrt{p}.\sin I, \\ c_2\sin i = -\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin I. \end{cases}$$

Il suit de ces formules *que le plan invariable passera constamment entre les plans des deux orbites.* On voit par la troisième des formules (4.), que *l'intersection commune des plans des deux orbites se meut dans le plan invariable.* Je remarque que la position du plan d'une orbite, est indépendante de la forme que l'on suppose à cet orbite, et qu'elle est entièrement déterminée dès que le centre du mouvement ou l'origine des coordonnées est fixé. En effet, ce plan est celui qui passe, dans chaque moment du temps, par l'origine des coordonnées et par deux positions consécutives de la planète.

4. L'intersection commune des plans des deux orbites tournant autour du centre des coordonnées dans un plan fixe dans l'espace, et que l'on prendra pour celui des x et y, il paraît naturel de prendre pour variables,

Les deux rayons vecteurs . . . . r et r_1,
Leurs distances au noeud ascendant commun des plan des deux orbites . . . . v et v_1,
Les inclinaisons des ces plans au plan invariable . . . i et i_1,
La longitude du noeud ascendant commun des deux plans ou sa distance à l'axe des x . . . . Ω.

Par les formules connues de la trigonométrie sphérique, on aura

$$1.\quad \begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos v - \sin\Omega\cos i\sin v), \\ y = r(\sin\Omega\cos v + \cos\Omega\cos i\sin v), \\ z = r\sin i\sin v, \\ x_1 = r_1(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ y_1 = r_1(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ z_1 = r_1\sin i_1\sin v_1. \end{cases}$$

Nommons δv l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs de la première planète fictive; comme dans le plan de l'orbite d'une planète se trouve aussi sa position consécutive, on tirera des formules (1.) les deux systèmes de formules

$$2.\quad \begin{cases} d\frac{x}{r} = -(\cos\Omega\sin v + \sin\Omega\cos i\cos v)\delta v = A\delta v, \\ d\frac{y}{r} = -(\sin\Omega\sin v - \cos\Omega\cos i\cos v)\delta v = B\delta v, \\ d\frac{z}{r} = \sin i\cos v\,\delta v = C\delta v; \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} d\frac{x}{r} = A\,dv + A'\,di - \frac{y}{r}\,d\Omega, \\ d\frac{y}{r} = B\,dv + B'\,di + \frac{x}{r}\,d\Omega, \\ d\frac{z}{r} = C\,dv + C'\,di, \end{cases}$$

en faisant

$$4.\quad \begin{cases} A' = \sin\Omega\sin i\sin v, \\ B' = -\cos\Omega\sin i\sin v, \\ C' = \cos i\sin v. \end{cases}$$

Il suit des formules (2.) et (3.),

$$5.\quad \begin{cases} 0 = A(dv - \delta v) + A'\,di - \frac{y}{r}\,d\Omega, \\ 0 = B(dv - \delta v) + B'\,di + \frac{x}{r}\,d\Omega, \\ 0 = C(dv - \delta v) + C'\,di. \end{cases}$$

On tire des formules (1.), (2.) et (4.)

$$6.\quad \begin{cases} \cos\Omega.A + \sin\Omega.B = -\sin v, \\ \cos\Omega.A' + \sin\Omega.B' = 0, \\ -\cos\Omega.y + \sin\Omega.x = -r\cos i \sin v. \end{cases}$$

On aura donc, d'après les formules (5.),

$$7.\quad \begin{cases} \delta v - dv = \cos i\, d\Omega = \tang v.\dfrac{di}{\tang i}, \\ d\Omega = \tang v.\dfrac{di}{\sin i}. \end{cases}$$

La formule

$$\delta v - dv = \cos i\, d\Omega$$

peut être déduite aisément de la considération d'un triangle sphérique formé par les côtés

$$d\Omega,\quad v+\delta v,\quad v+dv.$$

Soient

$$8.\quad \begin{cases} \cos\Omega = n\cos p, & \sin\Omega = n'\cos p', \\ \cos i\sin\Omega = n\sin p, & \cos i\sin\Omega = n'\sin p', \end{cases}$$

on aura

$$9.\quad \begin{cases} x = r.n\cos(v+p), & y = r.n'\cos(v-p'), \\ d.\dfrac{x}{r} = -n\sin(v+p)\delta v, & d.\dfrac{y}{r} = -n'\sin(v-p')\delta v. \end{cases}$$

Il s'ensuit de ces formules,

$$x\,d.\frac{y}{r} - y\,d.\frac{x}{r} = r\,nn'\sin(p+p')\delta v,$$

$$y\,d.\frac{z}{r} - z\,d.\frac{y}{r} = r\sin i.n'\cos p'.\delta v,$$

$$z\,d.\frac{x}{r} - x\,d.\frac{z}{r} = -r\sin i.n\cos p.\delta v,$$

ou, en substituant les formules (8.),

$$10.\quad \begin{cases} x\,dy - y\,dx = rr\cos i.\delta v, \\ y\,dz - z\,dy = rr\sin\Omega\sin i.\delta v, \\ z\,dx - x\,dz = -rr\cos\Omega\sin i.\delta v. \end{cases}$$

Ajoutant les carrés de ces équations, on a, d'après des formules connues,

$$rr(dx^2+dy^2+dz^2-dr^2) = r^4\delta v^2,$$

ou

$$11.\quad dx\,dx + dy\,dy + dz\,dz = dr\,dr + rr\,\delta v\,\delta v.$$

Pour avoir des formules semblables par rapport à la deuxième des planètes fictives, on n'a qu'à ajouter un trait à chaque lettre dans les formules (2.),

(10.) et (11.), pourvu qu'on nomme dv_1 l'angle que forment ses deux rayons vecteurs consécutifs. Donc, puisqu'on a $\Omega_1 = \Omega$, il viendra, d'après la seconde des formules (7.),

$$12. \quad \operatorname{tang} v . \frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} v_1 . \frac{di}{\sin i}.$$

Mettant $c = c_1 = 0$ dans les formules (15.), n° 1, et substituant les formules (10.), ainsi que leurs semblables relatives à la deuxième planète, on a

$$13. \quad \begin{cases} \mu rr \cos i . \delta v + \mu_1 r_1 r_1 \cos i_1 . \delta v_1 = c_2 dt, \\ \mu rr \sin i . \delta v + \mu_1 r_1 r_1 \sin i_1 . \delta v_1 = 0. \end{cases}$$

De ces formules on tire les valeurs suivantes de δv et de δv_1,

$$14. \quad \begin{cases} \delta v = dv + \operatorname{tang} v \frac{di}{\operatorname{tang} i} = -\frac{c_2 \sin i}{\mu rr \sin I} dt, \\ \delta v_1 = dv_1 + \operatorname{tang} v_1 \frac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} = -\frac{c_2 \sin i}{\mu_1 r_1 r_1 \sin I} dt, \end{cases}$$

où, comme ci-dessus, on a fait $I = i_1 - i$. Substituant la première de ces formules dans la première des formules (10.), il vient

$$15. \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \frac{c_2 \sin i_1 \cos i}{\mu \sin I}.$$

La différentielle de cette quantité sera égale à

$$-\frac{c_2}{\mu} . \frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin I^2} d . \frac{\sin I}{\sin i_1 \cos i} = \frac{c_2}{\mu} . \frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin I^2} d . \operatorname{tang} i \text{ c.} \operatorname{tang} i_1;$$

on aura donc

$$16. \quad x \frac{d^2 y}{dt} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{c_2}{\mu \sin I^2} \left(\sin i_1 \cos i_1 \frac{di}{dt} - \sin i \cos i \frac{di_1}{dt} \right).$$

On tire encore des formules (11.) et (14.) la suivante

$$17. \quad \cos i_1 dv - \cos i dv_1 = \frac{c_2}{\sin I} \left(\frac{\sin i_1 \cos i_1}{\mu rr} + \frac{\sin i \cos i}{\mu_1 r_1 r_1} \right) dt.$$

L'expression de la force vive du système est fournie par la formule (4.), n° 1., et par les formules (11.) et (14.) données ci-dessus,

$$18. \quad \begin{cases} 2T = \mu \left[rr \left(\frac{\delta v}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\delta r}{dt} \right)^2 \right] + \mu_1 \left[r_1 r_1 \left(\frac{\delta v_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\delta r_1}{dt} \right)^2 \right] \\ \quad = \frac{c_2^2}{\sin I^2} \left(\frac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1} \right) + \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{dr_1}{dt} \right)^2. \end{cases}$$

Les formules (12.) et (19.), n° 1., donnent

$$19. \quad \begin{cases} 2T = 2U - 2h, \\ \mu r \frac{d^2 r}{dt^2} + \mu_1 r_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{dr_1}{dt} \right)^2 = U - 2h, \end{cases}$$

d'où vient

$$20.\quad \begin{cases} \mu\left[2r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]+\mu_1\left[2r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}+\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad -\frac{c_2^2}{\sin I^2}\left[\frac{\sin i_1^2}{\mu rr}+\frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right]+2h = 0. \end{cases}$$

Remarquons encore la formule qui dérive des formules (1.),

$$21.\quad xy_1-yx_1 = rr_1(\cos i_1 \sin v_1 \cos v - \cos i \sin v \cos v_1).$$

Des formules (12.) et (16.) on tire

$$22.\quad \begin{cases} x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{c_2 \sin i_1}{\mu \cos v \sin v_1 \sin I^2}(\cos i_1 \sin v_1 \cos v - \cos i \sin v \cos v_1)\frac{di}{dt} \\ \qquad = \frac{c_2 \sin i_1 (xy_1-yx_1)}{\mu \cos v \sin v_1 \sin I^2 rr_1}\cdot\frac{di}{dt}. \end{cases}$$

Substituant cette formule dans la dernière des formules (14.), n° 1., il vient

$$23.\quad \frac{c_2 \sin i_1}{\cos v \sin v_1 \sin I^2 rr_1}\cdot\frac{di}{dt} = -\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\varrho_2^3}+\frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\varrho_1^3}+\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}\right).$$

Comme on a, d'après les formules (11.) et (14.),

$$24.\quad xd^2x+yd^2y+zd^2z = \tfrac{1}{2}d^2.rr-(drdr+rr\delta v^2) = rd^2r-c_2^2\frac{\sin i_1^2}{\mu^2r^2\sin I^2}dt^2,$$

il suit des formules (13.), n° 1.,

$$25.\quad \begin{cases} \mu\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c_2c_2}{\mu}\cdot\frac{\sin i_1^2}{\sin I^2 r^3}-\frac{mm_1\gamma_2(\gamma_2 r+\delta_2 r_1 \cos U)}{\varrho_2^3} \\ \qquad -\frac{mm_2\gamma_1(\gamma_1 r+\delta_1 r_1 \cos U)}{\varrho_1^3}-\frac{m_1m_2\gamma(\gamma r+\delta r_1 \cos U)}{\varrho^3}. \end{cases}$$

Des formules (18.) et (25.) on peut déduire la suivante

$$26.\quad \frac{c_2^2}{\mu rr}d.\frac{\sin i_1^2}{\sin I^2}+\frac{c_2^2}{\mu_1 r_1 r_1}d.\frac{\sin^2 i^2}{\sin I^2}$$

$$= 4rr_1 \sin U dU\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\varrho_2^3}+\frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\varrho_1^3}+\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}\right).$$

On obtient aussi la valeur de dU en observant que, dans l'équation

$$\cos U = \cos v \cos v_1 + \cos I \sin v \sin v_1,$$

on peut mettre en même temps $U+dU$, $v+\delta v$, $v_1+\delta v_1$ au lieu de U, v, v_1, ce qui donne

$$27.\quad \begin{cases} \sin U dU = (\sin v \cos v_1 - \cos I \cos v \sin v_1)\delta v \\ \qquad +(\cos v \sin v_1 - \cos I \sin v \cos v_1)\delta v_1. \end{cases}$$

Si, dans le triangle sphérique formé par les côtés U, v, v_1, on nomme φ et φ_1 les angles opposés aux côtés v et v_1, on a

$$28. \quad dU = \cos\varphi\,\delta v + \cos\varphi_1\,\delta v_1,$$

formule qui fournit l'interprétation géométrique de la formule (27.)

Les formules (14.), (23.) et (27.) pourront servir à vérifier la formule (26.)

5. Entre les six quantités

$$r,\ r_1;\quad v,\ v_1;\quad i,\ i_1$$

et le temps t, on a, d'après les formules (12.), (14.), (19.), (23.) du précédent article, les équations suivantes qui pourront servir à développer ces quantités en fonctions du temps.

Équations différentielles du problème des trois corps.

$$\text{I.}\qquad \tang v\,\frac{di}{\sin i} = \tang v_1 . \frac{di_1}{\sin i_1},$$

$$\text{II.}\qquad \tang v\,\frac{di}{\tang i} + dv = \frac{c_2}{\mu}.\frac{\sin i_1}{\sin I}.\frac{dt}{rr},$$

$$\text{III.}\qquad \tang v\,\frac{di_1}{\tang i_1} + dv_1 = \frac{c_2}{\mu_1}.\frac{\sin i}{\sin I}.\frac{dt}{r_1 r_1},$$

$$\text{IV.}\qquad \frac{c_2 \sin i_1}{\cos v \sin v_1 \sin I^2 r r_1}\,di = -\left(\frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\varrho_2^3} + \frac{m m_2 \gamma_1 \delta_1}{\varrho_1^3} + \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\varrho^3}\right) dt,$$

$$\text{V.}\qquad \frac{c_2^2}{\sin I^2}\left(\frac{\sin i_1^2}{\mu r r} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = 2U - 2h,$$

$$\text{VI.}\qquad \frac{d^2(\mu r r + \mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2U - 4h.$$

On a mis dans ces formules

$$1.\quad \begin{cases} U = \dfrac{m m_1}{\varrho_2} + \dfrac{m m_2}{\varrho_1} + \dfrac{m_1 m_2}{\varrho} \\ \varrho\varrho = \gamma\gamma rr + 2\gamma\delta r r_1 \cos U + \delta\delta r_1 r_1, \\ \varrho_1\varrho_1 = \gamma_1\gamma_1 rr + 2\gamma_1\delta_1 r r_1 \cos U + \delta_1\delta_1 r_1 r_1, \\ \varrho_2\varrho_2 = \gamma_2\gamma_2 rr + 2\gamma_2\delta_2 r r_1 \cos U + \delta_2\delta_2 r_1 r_1, \\ \cos U = \cos v \cos v_1 + \cos I \sin v \sin v_1. \end{cases}$$

Entre les six constantes γ, δ, etc., on a les équations de condition

$$2.\quad \begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0, \\ m_1 m_2 \gamma\delta + m_2 m \gamma_1 \delta_1 + m m_1 \gamma_2 \delta_2 = 0, \end{cases}$$

où m, m_1, m_2 sont les masses du Soleil et des deux planètes. Donc trois des constantes γ, δ, etc., pourront être prises à l'arbitraire. Les quantités μ et μ_1 sont déterminées par les formules

$$3.\quad \begin{cases} M\mu = m_1 m_2 \gamma\gamma + m_2 m \gamma_1 \gamma_1 + m m_1 \gamma_2 \gamma_2, \\ M\mu_1 = m_1 m_2 \delta\delta + m_2 m \delta_1 \delta_1 + m m_1 \delta_2 \delta_2, \end{cases}$$

M étant la somme des trois masses.

Après avoir intégré complétement le système des six équations (I. à VI.), on a encore à déterminer l'angle Ω au moyen de la formule

$$\text{VII.}\qquad d\Omega = \operatorname{tang} v \cdot \frac{di}{\sin i},$$

ce qui se fait par une simple quadrature. On formera ensuite les six quantités

$$4.\quad \begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos v - \sin\Omega\cos i\sin v), & x_1 = r_1(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ y = r(\sin\Omega\cos v + \cos\Omega\cos i\sin v), & y_1 = r_1(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ z = r\sin i\sin v, & z_1 = r_1\sin i_1\sin v_1, \end{cases}$$

et les six constantes

$$5.\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1}{M}, & \beta = \dfrac{m_1\delta_2 - m_2\delta_1}{M}, \\ \alpha_1 = \dfrac{m_2\gamma - m\gamma_2}{M}, & \beta_1 = \dfrac{m_2\delta - m\delta_2}{M}, \\ \alpha_2 = \dfrac{m\gamma_1 - m_1\gamma}{M}, & \beta_2 = \dfrac{m\delta_1 - m_1\delta}{M}, \end{cases}$$

après quoi on aura les coordonnées rectangulaires du Soleil et des deux planètes, rapportées à leur centre de gravité, le plan invariable étant pris pour celui des x et y,

$$6.\quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta x_1, & \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1, \\ v = \alpha y + \beta y_1, & v_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & v_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_1, \\ \zeta = \alpha z + \beta z_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1, & \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1. \end{cases}$$

Voilà donc le problème des trois corps réduit à l'intégration des six équations (I. à VI.) et à une quadrature. *Les six équations différentielles* (I. à VI.) *sont toutes du premier degré, hors une seule qui est du second, et il n'y entre aucune trace des noeuds.*

9.

Appendice au Mémoire sur l'attraction de l'ellipsoïde homogène imprimé dans le Tome XX. de ce journal.

(Par M. J. *Plana* à Turin.)

Je me propose de donner ici le calcul détaillé du procédé suivi par *Legendre* dans son mémoire de 1788, pour former directement l'expression de l'attraction de l'ellipsoïde homogène sur un point extérieur placé dans le plan d'une de ses trois sections principales. Ce calcul est loin d'être facile, même à l'aide des résultats intermédiaires laissés par *Legendre,* et j'ai pensé qu'il pouvait être utile de rétablir toutes les parties d'une analyse aussi épineuse, afin de rendre plus sensibles pour tout lecteur de son Mémoire les difficultés, qui, sans le secours des séries, ont été surmontées dans cette mémorable intégration.

Certes on a raison d'admirer les principes indirects par lesquels on élude, presque de prime abord, les difficultés de ce genre. Mais un analyste philosophe ne borne pas là sa curiosité: il desire savoir s'il est possible de sortir, avec succès, de l'abîme où peut entrainer une méthode directe par la seule puissance des transformations du calcul algébrique. Et à cet égard, *Legendre* offre dans cette partie de son Mémoire un exemple capable d'avoir de l'influence sur la solution d'autres problèmes, par les idées qu'il peut suggérer, soit en faveur, soit contre les méthodes directes. Toutefois il sera vrai de dire, que ce calcul peut être considéré comme un utile exercice d'analyse. D'ailleurs on accordera sans hésitation, que les réflexions que je faisois vers la fin du No. 25. de mon Mémoire seront mieux senties, en ayant sous les yeux la suite non-interrompue des artifices analytiques par lesquels on parvient au résultat final en abandonnant, dans le cas de $c=0$, les deux variables R^2 et φ pour traiter la double intégrale avec ses deux variables primitives p et q.

La formule générale placée au commencement du No. 25. donne d'abord

$$X = 2\iint \frac{R \sin p \,.\, \sin^2 q \,.\, dp\, dq}{\sin^2 q(\sin^2 p + m\cos^2 p) + n\cos^2 q}.$$

En faisant $c=0$ et $p^1=\varphi+\theta$, on aura conformément à l'analyse de ce cas particulier exposée dans le No. (8.):

$$R^2 = \frac{mab.\sin^2 q}{\sin\varphi.\cos\varphi}(\sin^2\Pi-\sin^2\theta),$$

et par conséquent

$$X = 2\sqrt{\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}}.\iint\frac{d\varphi\sin(\varphi+\theta)\,dq\sin^2 q\sqrt{(\sin^2\Pi-\sin^2\theta)}}{\sin^2 q(\sin^2 p+m\cos^2 p)+n\cos^2 q},$$

ou bien

$$X = 2\sqrt{\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}}\iint\frac{d\theta\sin(\varphi+\theta)\,dq\sin q\sqrt{(\sin^2\Pi-\sin^2\theta)}}{\frac{1}{2}(m+1)+\frac{1}{2}(m-1)\cos 2p+n\,\text{cotang}^2 q}.$$

Nous avons

$$\cos 2p = \cos 2\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\sin 2\varphi.\sin\theta.\cos\theta,$$
$$n\,\text{cotang}^2 q = n\,\text{cotang}^2 q(\cos^2\theta+\sin^2\theta):$$

donc en posant pour plus de simplicité

$$f' = \tfrac{1}{2}(m+1)+\tfrac{1}{2}(m-1)\cos 2\varphi+n\,\text{cotang}^2 q,$$
$$g' = (1-m)\sin 2\varphi,$$
$$h' = \tfrac{1}{2}(m+1)-\tfrac{1}{2}(m-1)\cos 2\varphi+n\,\text{cotang}^2 q,$$

il viendra

$$X = 2\sqrt{\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}}\int dq\sin q\int\frac{d\theta\sin(\varphi+\theta)\sqrt{(\sin^2\Pi-\sin^2\theta)}}{f'\cos^2\theta+g'\sin\theta.\cos\theta+h'\sin^2\theta}.$$

On a démontré dans le No. (8.) que les limites de θ sont $\pm\Pi$; ce qui revient à dire que ces limites sont celles qui donnent $R^2=0$. On voit aussitôt, que l'intégration par rapport à θ est possible en faisant $\text{tang}\,\theta=t$: mais afin de trouver d'un coup une fonction rationnelle, il vaut mieux faire $\text{tang}\,\theta=\text{tang}\,\Pi.\sin\omega$, ou bien $\text{tang}\,\theta=u\sin\omega$, en posant $u=\text{tang}\,\Pi$. D'après cette équation, on a

$$d\theta = \frac{u\cos\omega.d\omega}{1+u^2\sin^2\omega},$$

$$\sin(\varphi+\theta) = \frac{\sin\varphi+u\cos\varphi.\sin\omega}{\sqrt{(1+u^2\sin^2\omega)}}$$

$$\sqrt{(\sin^2\Pi-\sin^2\theta)} = \frac{\sin\Pi.\cos\omega}{\sqrt{(1+u^2\sin^2\omega)}}.$$

Les limites de la nouvelle variable ω étant $\mp 90^0$ ou bien $\mp\frac{1}{2}\pi$, l'expression précédente de X revient à dire, que

$$X=2\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int dq\sin q.\frac{\sin^2\Pi}{\cos\Pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega\cos^2\omega(\sin\varphi+u\cos\varphi.\sin\omega)}{(1+u^2\sin^2\omega)(f'+g'u\sin\omega+h'u^2\sin^2\omega)}.$$

Soit $\sin\omega=x$, et

$$\frac{(1-x^2)(\sin\varphi+u\cos\varphi.x)}{(1+u^2x^2)(f'+g'ux+h'u^2x^2)}=\frac{1}{h'u^4}\cdot\frac{U}{V};$$

c'est-à-dire:

$$\frac{U}{V}=\frac{(1-x^2)(\sin\varphi+u\cos\varphi.x)}{\left(x^2+\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{f'}{h'u^2}+\frac{g'}{h'u}x+x^2\right)}.$$

D'après le principe connu sur la décomposition des fractions rationnelles, si l'on fait

$$\frac{U}{V}=\frac{M}{x-\frac{\sqrt{-1}}{u}}+\frac{M'}{x+\frac{\sqrt{-1}}{u}}+\dots,$$

on aura, en observant que

$$\frac{dV}{dx}=2x\left(x^2+\frac{g'x}{h'u}+\frac{f'}{h'u^2}\right)+\left(x^2+\frac{1}{u^2}\right)\left(2x+\frac{g'}{h'u}\right):$$

$$M=-\frac{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)(\sin\varphi+\cos\varphi.\sqrt{-1})}{\frac{2\sqrt{-1}}{u}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{g'\sqrt{-1}}{h'u^2}-\frac{f'}{h'u^2}\right)},$$

$$M'=-\frac{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)(\sin\varphi-\cos\varphi.\sqrt{-1})}{\frac{2\sqrt{-1}}{u}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{g'\sqrt{-1}}{h'u^2}-\frac{f'}{h'u^2}\right)};$$

d'où l'on tire

$$M=\tfrac{1}{4}(h'u(1+u^2))\frac{(\cos\varphi-\sin\varphi.\sqrt{-1})(f'-h'-g'\sqrt{-1})}{(f'-h')^2+g'^2},$$

$$M'=\tfrac{1}{4}(h'u(1+u^2))\frac{(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})(f'-h'+g'\sqrt{-1})}{(f'-h')^2+g'^2};$$

$$\frac{M}{h'u^4}=-\frac{(1+u^2)}{2u^3}\left\{\frac{[g'\sin\varphi-(f'-h')\cos\varphi]+[g'\cos\varphi+(f'-h')\sin\varphi]\sqrt{-1}}{(f'-h')^2+g'^2}\right\},$$

$$\frac{M'}{h'u^4}=-\frac{(1+u^2)}{2u^3}\left\{\frac{[g'\sin\varphi-(f'-h')\cos\varphi]-[g'\cos\varphi+(f'-h')\sin\varphi]\sqrt{-1}}{(f'-h')^2+g'^2}\right\}.$$

Comme

$$\frac{U}{V}=\frac{(M+M')u^2x+(M-M')u\sqrt{-1}}{1+u^2x^2}+\dots$$

il convient de former les expressions suivantes:

$$\left(\frac{M}{h'u^4}+\frac{M'}{h'u^4}\right)u^2=-\frac{(1+u^2)}{u}\cdot\frac{(g'\sin\varphi-(f'-h')\cos\varphi)}{g'^2+(f'-h')^2},$$

$$\left(\frac{M}{h'u^4}-\frac{M'}{h'u^4}\right)u\sqrt{-1}=\frac{(1+u^2)}{u^2}\cdot\frac{(g'\cos\varphi+(f'-h')\sin\varphi)}{g'^2+(f'-h')^2}.$$

En y substituant pour f', g', h' leurs valeurs, on aura

$$\left(\frac{M}{h'u^4}+\frac{M'}{h'u^4}\right)u^2 = \frac{1+u^2}{u}\left\{\frac{(m-1)\cos 2\varphi.\cos\varphi-2(1-m)\sin^2\varphi.\cos\varphi}{(m-1)^2\cos^2 2\varphi+(1-m)^2\sin^2 2\varphi}\right\}$$
$$=\frac{(1+u^2)}{u}.\frac{\cos\varphi}{m-1},$$
$$\left(\frac{M}{h'u^4}-\frac{M'}{h'u^4}\right)u\sqrt{-1}=\frac{(1+u^2)}{u^2}\left\{\frac{(m-1)\sin\varphi.\cos 2\varphi+2(1-m)\sin\varphi.\cos^2\varphi}{(m-1)^2\cos^2 2\varphi+4(1-m)^2\sin^2\varphi.\cos^2\varphi}\right\}$$
$$=\left(\frac{1+u^2}{u^2}\right)\frac{\sin\varphi}{m-1}\left\{\frac{\cos 2\varphi-2\cos^2\varphi}{\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi}\right\}=-\frac{(1+u^2)}{u^2}.\frac{\sin\varphi}{m-1}.$$

De là nous concluons, que

$$X=2\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int\frac{dq\sin q.\sin^2\Pi}{\cos\Pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega(A+Bu\sin\omega)}{1+u^2\sin^2\omega}$$
$$+2\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int\frac{dq\sin q.\sin^2\Pi}{\cos\Pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega(C+Du\sin\omega)}{f'+g'u\sin\omega+h'u^2\sin^2\omega},$$

en posant pour plus de simplicité

$$A=-\frac{(1+u^2)}{u^2}.\frac{\sin\varphi}{m-1}=-\frac{\sin\varphi}{m-1}.\frac{1}{\sin^2\Pi},$$
$$B=\frac{(1+u^2)}{u^2}.\frac{\cos\varphi}{m-1}=\frac{\cos\varphi}{m-1}.\frac{1}{\sin^2\Pi}.$$

Pour déterminer les coëfficients C et D on observera que la fraction $\frac{U}{V}$ devient nulle en y faisant $x=\pm 1$; de sorte qu'on a les deux équations

$$\frac{A+Bu}{1+u^2}+\frac{C+Du}{f'+g'u+h'u^2}=0,$$
$$\frac{A-Bu}{1+u^2}+\frac{C-Du}{f'-g'u+h'u^2}=0;$$

ou bien

$$(\alpha.)\quad\begin{cases}(A+Bu)(f'+g'u+h'u^2)+(C+Du)(1+u^2)=0,\\(A-Bu)(f'-g'u+h'u^2)+(C-Du)(1+u^2)=0.\end{cases}$$

Mais il n'est pas encore temps d'employer ces deux équations: il faut auparavant pousser plus loin l'expression précédente de X.

Comme il est manifeste que

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega\sin\omega}{1+u^2\sin^2\omega}=0,$$

et qu'on a

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{1+u^2\sin^2\omega}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{1+u^2\sin^2\omega}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{2d\omega}{(2+u^2)-u^2\cos 2\omega}$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{((2+u^2)^2-u^4)}}=\frac{\pi}{\sqrt{(1+u^2)}}=\pi\cos\Pi;$$
$$A\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{1+u^2\sin^2\omega}=\pi A\cos\Pi=-\frac{\pi\sin\varphi}{m-1}.\frac{\cos\Pi}{\sin^2\Pi},$$

ou peut écrire

$$X = \frac{2\pi \sin\varphi}{1-m}\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int dq \sin q$$

$$+2\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int \frac{dq \sin q.\sin^2\Pi}{\cos\Pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega(C+Du\sin\omega)}{f'+g'u\sin\omega+h'u^2\sin^2\omega}.$$

Pour exécuter l'intégration relative à ω, nous allons établir une formule générale ainsi qu'il suit. Soit,

$$P = \frac{A+B\sin\varphi}{C+D\sin\varphi+E\sin^2\varphi} = \frac{\frac{A}{E}+\frac{B}{E}\sin\varphi}{\sin^2\varphi+\frac{D}{E}\sin\varphi+\frac{C}{E}}\cdot$$

Les racines du dénominateur étant

$$\sin\varphi = -\frac{D\pm\sqrt{(D^2-4CE)}}{2E},$$

si l'on fait

$$\alpha = -\frac{D+\sqrt{(D^2-4CE)}}{2E}, \quad \beta = -\frac{D-\sqrt{(D^2-4CE)}}{2E}$$

on aura,

$$P = \frac{\frac{A}{E}+\frac{B}{E}\sin\varphi}{(\sin\varphi-\alpha)(\sin\varphi-\beta)} = \frac{M}{\sin\varphi-\alpha}+\frac{N}{\sin\varphi-\beta},$$

$$M = \frac{A+B\alpha}{2E\alpha+D} = +\frac{A+B\alpha}{\sqrt{(D^2-4CE)}};$$

$$N = \frac{A+B\beta}{2E\beta+D} = -\frac{(A+B\beta)}{\sqrt{(D^2-4CE)}}.$$

Donc en substituant pour α et β leurs valeurs, il viendra

$$M = \frac{B}{2E}+\frac{(2EA-BD)}{2E\sqrt{(D^2-4CE)}}; \quad N = \frac{B}{2E}-\frac{(2EA-BD)}{2E\sqrt{(D^2-4CE)}}.$$

On peut écrire

$$P = \frac{M}{\cos(90^\circ-\varphi)-\alpha}+\frac{N}{\cos(90^\circ-\varphi)-\beta}:$$

donc en faisant

$$Q = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} P d\varphi = -\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} P d(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi),$$

on aura

$$Q = \frac{\pi M}{\sqrt{(\alpha^2-1)}}+\frac{\pi N}{\sqrt{(\beta^2-1)}},$$

ou bien

$$\frac{Q}{\pi} = \frac{M.2E}{\sqrt{[(D-\sqrt{(D^2-4CE)})^2-4E^2]}}+\frac{N.2E}{\sqrt{[(D+\sqrt{(D^2-4CE)})^2-4E^2]}}.$$

En substituant pour M et N leurs valeurs précédentes, et en posant pour plus de simplicité

$$G=(D-\sqrt{(D^2-4CE)})^2-4E^2;\qquad G'=(D+\sqrt{(D^2-4CE)})^2-4E^2,$$

il viendra

$$\frac{Q}{\pi}=B\left(\frac{1}{\sqrt{G}}+\frac{1}{\sqrt{G'}}\right)+\frac{(2EA-BD)}{\sqrt{(D^2-4CE)}}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}-\frac{1}{\sqrt{G'}}\right),$$

ou bien

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{B(\sqrt{G}+\sqrt{G'})^2}{\sqrt{(GG')}(\sqrt{G}+\sqrt{G'})}+\frac{(2EA-BD)(G'-G)}{\sqrt{(D^2-4CE)}\sqrt{(GG')}(\sqrt{G}+\sqrt{G'})}.$$

Or nous avons

$$G'-G=(D+\sqrt{(D^2-4CE)})^2-(D-\sqrt{(D^2-4CE)})^2=4D\sqrt{(D^2-4CE)};$$

partant

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{(2EA-BD)4D+B(\sqrt{G}+\sqrt{G'})^2}{\sqrt{(GG')}(\sqrt{G}+\sqrt{G'})}.$$

Mais,

$$G+G'=-8E^2+4D^2-8CE=4D^2-8E(E+C):$$

donc

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{4D.2EA-B[8E(C+E)-2\sqrt{(GG')}]}{\sqrt{(GG')}(\sqrt{G}+\sqrt{G'})}$$

Cela posé, je remarque que

$$\begin{aligned}GG'&=(D+2E-\sqrt{(D^2-4CE)})(D-2E-\sqrt{(D^2-4CE)})\times\\&\quad(D+2E+\sqrt{(D^2-4CE)})(D-2E+\sqrt{(D^2-4CE)})\\&=[(D+2E)^2-(D^2-4CE)][(D-2E)^2-(D^2-4CE)]\\&=(4E^2+4ED+4EC)(4E^2-4ED+4EC)\\&=(4E)^2(E+C+D)(E+C-D)\\&=(4E)^2[(E+C)^2-D^2];\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{4D.2EA-8EB[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]}{4E\sqrt{((C+E)^2-D^2)}(\sqrt{G}+\sqrt{G'})},$$

ou bien

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{2DA-2B[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]}{\sqrt{((C+E)^2-D^2)}(\sqrt{G}+\sqrt{G'})}.$$

Mais nous avons

$$\begin{aligned}\sqrt{G}+\sqrt{G'}&=\sqrt{(\sqrt{G}+\sqrt{G'})^2}=\sqrt{(G+G'+2\sqrt{(GG')})}\\&=\sqrt{\{4D^2-8E(C+E)+8E\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\}}\\&=\sqrt{\{4D^2-8E[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]\}};\end{aligned}$$

partant

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{AD-B[(C+E)-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]}{\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\sqrt{\{D^2-2E[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]\}}}.$$

Il paraît qu'on devrait s'arrêter ici: mais cette formule ayant l'inconvénient de donner $\frac{Q}{\pi}=\frac{0}{0}$, lorsqu'on y fait $D=0$, il faut pousser plus loin la transformation. Pour cela, remarquons que

$$D^2=[C+E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}][C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}];$$

de sorte qu'on peut écrire,

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{AD-B[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]}{\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\sqrt{\{[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}][C+E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}-2E]\}}},$$

ou bien

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{AD-B[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D)}]}{\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\sqrt{\{[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}][C-E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]\}}}.$$

D'après la valeur précédente de D^2 cela revient à dire, que

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{A\sqrt{[C+E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]}-B\sqrt{[C+E-\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]}}{\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\sqrt{[C-E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par

$$\sqrt{[C+E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]}$$

et ayant égard à la valeur de D^2 qu'on vient de citer, on aura

$$\frac{Q}{\pi}=\frac{A\{C+E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\}-BD}{\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\sqrt{\{[C+E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}][C-E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}]\}}},$$

et enfin

$$Q=\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi(A+B\sin\varphi)}{C+D\sin\varphi+E\sin^2\varphi}=\frac{\pi A\{C+E+\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\}-\pi.BD}{\sqrt{((C+E)^2-D^2)}\sqrt{\{[C+\sqrt{(C+E)^2-D^2)}]^2-E^2\}}}.$$

En appliquant cette formule à la dernière expression de X, il viendra

$$X=\frac{2\pi.\sin\varphi}{1-m}\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int dq\sin q$$
$$+2\pi\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int\frac{\sin^2\Pi}{\cos\Pi}.\frac{dq\sin q\{C[f'+h'u^2+E']-Dg'u^2\}}{E'\sqrt{((f'+E')^2-h'^2u^4)}};$$

ou l'on a fait pour plus de simplicité:

$$E'=\sqrt{((f'+h'u^2)^2-g'^2u^2)}.$$

D'après la formule (54.), nous avons, lorsque $c=0$:

$$\begin{aligned}R^2&=(a\cos\alpha+mb\cos\beta)^2-h(\cos^2\alpha+m\cos^2\beta+n\cos^2\gamma)\\&=\sin^2q(a\sin p+mb\cos p)^2-h\{\sin^2q(\sin^2p+m\cos^2p)+n\cos^2q\}\\&=\sin^2q\{a\sin(\varphi+\theta)+mb\cos(\varphi+\theta)\}^2\\&\qquad\qquad-h\sin^2q\{f'\cos^2\theta+g'\sin\theta\cos\theta+h'\sin^2\theta\}\\&=\frac{mab\sin^2q}{\sin\varphi.\cos\varphi}(\sin^2\Pi-\sin^2\theta);\end{aligned}$$

et puisque $R^2=0$ aux limites, c'est-à-dire lorsque $\theta=\pm\Pi$, il est clair que de là on tire ces deux équations:

$$\{a\sin(\varphi+\Pi)+mb\cos(\varphi+\Pi)\}^2 = \frac{h}{1+u^2}(f'+g'u+h'u^2),$$

$$\{a\sin(\varphi-\Pi)+mb\cos(\varphi-\Pi)\}^2 = \frac{h}{1+u^2}(f'-g'u+h'u^2).$$

Mais

$$\begin{aligned} & a\sin(\varphi+\Pi)+mb\cos(\varphi+\Pi) \\ &= (a\sin\varphi+mb\cos\varphi)\cos\Pi+(a\cos\varphi-mb\sin\varphi)\sin\Pi \\ &= \frac{(a\sin\varphi+mb\cos\varphi)}{\sqrt{(1+u^2)}}+\frac{(a\cos\varphi-mb\sin\varphi)u}{\sqrt{(1+u^2)}}; \end{aligned}$$

donc en posant

$$a' = a\sin\varphi+mb\cos\varphi; \qquad b' = a\cos\varphi-mb\sin\varphi,$$

on aura ces deux équations:

$$(\beta.)\quad \begin{cases} (a'+b'u)^2 = h(f'+g'u+h'u^2), \\ (a'-b'u)^2 = h(f'-g'u+h'u^2). \end{cases}$$

Maintenant si l'on fait

$$(\beta'.)\quad \begin{cases} P^2 = f'+g'u+h'u^2 = \dfrac{(a'+b'u)^2}{h}, \\ Q^2 = f'-g'u+h'u^2 = \dfrac{(a'-b'u)^2}{h}, \end{cases}$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}(P^2+Q^2) = f'+h'u^2; \qquad \tfrac{1}{2}(P^2-Q^2) = g'u;$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} E' &= \sqrt{(\tfrac{1}{4}(P^2+Q^2)^2-\tfrac{1}{4}(P^2-Q^2)^2)} = PQ, \\ f'+h'u^2+E' &= \tfrac{1}{2}(P^2+Q^2)+PQ = \tfrac{1}{2}(P+Q)^2, \\ \frac{C\{f'+h'u^2+E'\}-Dg'u^2}{E'\sqrt{((f'+E')^2-h'^2u^4)}} &= \frac{\frac{1}{2}C(P+Q)^2-\frac{1}{2}Du(P^2-Q^2)}{PQ\sqrt{((f'+h'u^2+E')(f'-h'u^2+E'))}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}C(P+Q)-\frac{1}{2}Du(P-Q)}{PQ\sqrt{(\frac{1}{2}(f'-h'u^2+E'))}} \\ &= \frac{(C-Du)P+(C+Du)Q}{PQ\sqrt{(2f'-2h'u^2+2E')}}. \end{aligned}$$

L'expression précédente de X est donc équivalente à celle-ci:

$$\begin{aligned} X = {} & \frac{2\pi\sin\varphi}{1-m}\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int dq\sin q \\ & +2\pi\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int dq\sin q.\frac{\sin^2\Pi}{\cos\Pi}.\frac{(C-Du)P+(C+Du)Q}{PQ\sqrt{(2f'-2h'u^2+2E')}}. \end{aligned}$$

Les deux équations désignées plus haut par (α.) donnent

$$C+Du = -\frac{(A+Bu)P^2}{1+u^2}, \qquad C-Du = -\frac{(A-Bu)Q^2}{1+u^2},$$

et par conséquent

$$\frac{(C-Du)P+(C+Du)Q}{PQ} = -\frac{A(P+Q)-u.B(P-Q)}{1+u^2}:$$

et comme les équations (β'.) donnent

$$P = \frac{a'+b'u}{\sqrt{h}}, \quad Q = \frac{a'-b'u}{\sqrt{h}},$$

il est clair que

$$\frac{(C-Du)P+(C+Du)Q}{PQ} = \frac{-2a'A-2b'Bu^2}{(1+u^2)\sqrt{h}}.$$

Mais on a vu que

$$A = -\frac{\sin\varphi}{m-1}.\frac{1+u^2}{u^2}, \quad B = \frac{\cos\varphi}{m-1}.\frac{1+u^2}{u^2};$$

partant

$$\frac{(C-Du)P+(C+Du)Q}{PQ} = \frac{2a'\sin\varphi-2b'u'u^2\cos\varphi}{(m-1)u^2\sqrt{h}}.$$

En substituant cette valeur à celle de X, on a

$$X = \frac{2\pi\sin\varphi}{1-m}\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\int dq\sin q$$

$$+\frac{4\pi}{(m-1)\sqrt{h}}.\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi.\cos\varphi}\right)}\left\{\begin{array}{l}+a'\sin\varphi\int\frac{dq\cos\Pi.\sin q}{\sqrt{(2f'-2h'u^2+2E')}}\\ -b'\cos\varphi\int\frac{dq\sin q.\frac{\sin^2\Pi}{\cos\Pi}}{\sqrt{(2f'-2h'u^2+2E')}}\end{array}\right\}$$

Nous avons

$$h'-f' = (1-m)\cos 2\varphi, \quad f'+h'u^2 = \tfrac{1}{2}(P^2+Q^2).$$

La première de ces deux équations donne

$$h'u^2 = f'u^2+(1-m)u^2\cos 2\varphi,$$

de sorte qu'on a

$$\tfrac{1}{2}(P^2+Q^2) = f'(1+u^2)+(1-m)u^2\cos 2\varphi,$$

d'où l'on tire

$$f' = \frac{\frac{1}{2}(P^2+Q^2)-(1-m)u^2\cos 2\varphi}{1+u^2},$$

et comme $h'u^2 = \frac{1}{2}(P^2+Q^2)-f'$, on peut écrire

$$h'u^2 = \frac{\frac{1}{2}(P^2+Q^2)(1+u^2)-\frac{1}{2}(P^2-Q^2)+(1-m)u^2\cos 2\varphi}{1+u^2}.$$

Il suit de là que

$$2f'-2h'u^2 = \frac{(P^2+Q^2)(1-u^2)-4(1-m)u^2\cos 2\varphi}{1+u^2},$$

et comme $E' = PQ$, il viendra

$$2E'+2f'-2h'u^2 = \frac{2PQ(1+u^2)+(P^2+Q^2)(1-u^2)-4(1-m)u^2\cos 2\varphi}{1+u^2}$$
$$= \frac{(P+Q)^2-u^2(P-Q)^2-4(1-m)u^2\cos 2\varphi}{1+u^2}$$
$$= \frac{4}{1+u^2}\left\{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2-\left(\frac{P-Q}{2}\right)^2u^2-(1-m)u^2\cos 2\varphi\right\},$$

ou bien, en observant que $\frac{P+Q}{2}=\frac{a'}{\sqrt{h}}$, $\frac{P-Q}{2}=\frac{b'u}{\sqrt{h}}$,

$$2E'+2f'-2h'u^2 = \frac{4}{h(1+u^2)}\{a'^2-b'^2u^4-h(1-m)u^2\cos 2\varphi\}.$$

Delà on tire

$$\sqrt{(2E'+2f'-2h'u^2)} = \frac{2\cos\Pi}{\sqrt{h}}\sqrt{(a'^2-b'^2u^4-h(1-m)u^2\cos 2\varphi)}.$$

Cette valeur étant substituée dans la dernière expression de X, on aura

$$X = \frac{2\pi\sin\varphi}{1-m}\sqrt{\left(\frac{mah}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)}\int dq\sin q$$
$$+\frac{2\pi}{m-1}\sqrt{\left(\frac{mah}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)}\left\{\begin{array}{l}+a'\sin\varphi\int\frac{dq\sin q}{\sqrt{(a'^2-b'^2u^4-h(1-m)u^2\cos 2\varphi)}}\\ -b'\cos\varphi\int\frac{dq\sin q\,.\,\mathrm{tang}^2\Pi}{\sqrt{(a'^2-b'^2u^4-h(1-m)u^2\cos 2\varphi)}}\end{array}\right\}.$$

Le produit des valeurs précédentes de a' et b' donne

$$a'b' = \tfrac{1}{2}(a^2-m^2b^2)\sin 2\varphi+mab\cos 2\varphi$$
$$= \cos 2\varphi\{mab+\tfrac{1}{2}(a^2-m^2b^2)\,\mathrm{tang}\,2\varphi\}.$$

On a trouvé dans le No. (8.) la valeur de $\mathrm{tang}\,2\varphi$: mais comme l'angle p est ici compté depuis l'axe des y, et non depuis l'axe des x, l'arc φ actuel donnera celui du No. (8.), en écrivant $90^0-\varphi$ au lieu de φ; c'est-à-dire on a

$$\mathrm{tang}\,2(90^0-\varphi) = \frac{2ab}{(a^2-b^2)-(a_1^2-b_1^2)}$$

ou bien

$$\mathrm{tang}\,2\varphi = \frac{2ab}{(a_1^2-b_1^2)-(a^2-b^2)}$$

Il suit delà que

$$a'b' = +ab\cos 2\varphi\left\{m-\frac{(a^2-m^2b^2)}{(a^2-b^2)-(a_1^2-b_1^2)}\right\}$$
$$= +ab\cos 2\varphi\left\{\frac{m(a^2-b^2-a_1^2+b_1^2)-a^2+m^2b^2}{(a^2-b^2)-(a_1^2-b_1^2)}\right\}$$
$$= -ab\cos 2\varphi\left\{\frac{m(a_1^2-b_1^2)+a^2(1-m)+m(1-m)b^2}{(a^2-b^2)-(a_1^2-b_1^2)}\right\}.$$

Mais

$$m(a_1^2-b_1^2) = ma_1^2\left(1-\frac{1}{m}\right) = a_1^2(m-1),$$

donc

$$a'b' = \frac{ab\cos 2\varphi(1-m)[a^2+mb^2-a_1^2]}{(a_1^2-b_1^2)-(a^2-b^2)} = \frac{ab(1-m).h\cos 2\varphi}{(a_1^2-b_1^2)-(a^2-b^2)}.$$

En comparant cette valeur de $a'b'$ avec la précédente de $\operatorname{tang} 2\varphi$, on voit aussitôt que

$$(1-m)h\cos 2\varphi = \frac{2a'b'}{\operatorname{tang} 2\varphi} = \frac{a'b'\cos 2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

d'où l'on tire la conséquence, que

$$a'^2 - b'^2u^4 - h(1-m)u^2\cos 2\varphi = a'^2 - b'^2u^4 - \frac{u^2a'b'\cos 2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$$
$$= (a'+b'u^2\operatorname{tang}\varphi)(a'-b'u^2\cot\varphi).$$

Ainsi on peut écrire l'équation

$$X = \frac{2\pi\sin\varphi}{1-m}\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)}\int dq\sin q$$
$$+\frac{2\pi}{m-1}\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)}\left\{\begin{array}{l}+a'\sin\varphi\int\frac{dq\sin q}{\sqrt{(a'+b'u^2\operatorname{tang}\varphi)(a'-b'u^2\cot\varphi)}}\\ -b'\cos\varphi\int\frac{dq\sin q.u^2}{\sqrt{(a'+b'u^2\operatorname{tang}\varphi)(a'-b'u^2\cot\varphi)}}\end{array}\right\},$$

laquelle est réductible à celle-ci beaucoup plus simple, savoir

$$X = \frac{2\pi\sin\varphi}{1-m}\sqrt{\left(\frac{mab}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)}\left\{\int dq\sin q - \int dq\sin q\sqrt{\left(\frac{a'-b'u^2\cot\varphi}{a'+b'u^2\operatorname{tang}\varphi}\right)}\right\}$$

ou bien

$$X = \frac{2\pi a\sqrt{m}}{1-m}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi\right)}\left\{\int dq\sin q - \int dq\sin q\sqrt{\left(\frac{a'-b'u^2\cot\varphi}{a'+b'u^2\operatorname{tang}\varphi}\right)}\right\}.$$

Nous avons

$$\frac{a'-b'u^2\cot\varphi}{a'+b'u^2\operatorname{tang}\varphi} = \frac{a'\cos^2\Pi - b'\sin^2\Pi\cot\varphi}{a'\cos^2\Pi + b'\sin^2\Pi\operatorname{tang}\varphi}$$
$$= \frac{a'\sin\varphi\cos^2\Pi - b'\sin^2\Pi\cos\varphi}{\operatorname{tang}\varphi(a'\cos\varphi\cos^2\Pi + b'\sin^2\Pi\sin\varphi)},$$

$$a'\sin\varphi\cos^2\Pi - b'\sin^2\Pi\cos\varphi = a'\sin\varphi - (a'\sin\varphi + b'\cos\varphi)\sin^2\Pi$$
$$= a'\sin\varphi - a\sin^2\Pi,$$
$$a'\cos\varphi\cos^2\Pi + b'\sin^2\Pi\sin\varphi = a'\cos\varphi - (a'\cos\varphi - b'\sin\varphi)\sin^2\Pi$$
$$= a'\cos\varphi - mb\sin^2\Pi.$$

Mais $a' = a\sin\varphi + mb\cos\varphi$, donc en substituant cette valeur de a' on aura

$$a'\sin\varphi - a\sin^2\Pi = a\sin^2\varphi + mb\sin\varphi\cos\varphi - a\sin^2\Pi,$$
$$a'\cos\varphi - mb\sin^2\Pi = a\sin\varphi\cos\varphi + mb\cos^2\varphi - mb\sin^2\Pi.$$

En remplaçant ψ par q et φ pour $90^\circ-\varphi$, la formule (x^{IX}) trouvée dans le No. (8.) donne

$$\sin^2\Pi = \cos^2\varphi + \frac{(b_1^2-b^2)}{ab}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{hn\sin\varphi\cos\varphi}{mab}\cot^2 q,$$

donc

$$a'\sin\varphi - a\sin^2\Pi$$
$$= a\sin^2\varphi + mb\sin\varphi\cos\varphi - a\cos^2\varphi$$
$$- \frac{(b_1^2-b^2)}{b}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{nh\sin\varphi\cos\varphi}{mb}\cot^2 q$$
$$= -a\cos 2\varphi + \left(mb - \frac{b_1^2}{b} + b\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{nh\sin\varphi\cos\varphi}{mb}\cot^2 q$$
$$= -a\cos 2\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{b}\left(mb^2 + b^2 - b_1^2 + \frac{nh}{m}\cot^2 q\right)$$
$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{b}\left(-2ab\cot 2\varphi + mb^2 + b^2 - b_1^2 + \frac{n}{m}h\cot^2 q\right).$$

En substituant ici pour $\cot 2\varphi$ sa valeur fournie par l'équation

$$\cot 2\varphi = \frac{(a_1^2-b_1^2)-(a^2-b^2)}{2ab},$$

il viendra

$$a'\sin\varphi - a\sin^2\Pi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{b}\left\{a^2 - a_1^2 + mb^2 + \frac{n}{m}h\cot^2 q\right\},$$

et comme $h = a^2 + mb^2 - a_1^2$, on peut écrire

$$a'\sin\varphi - a\sin^2\Pi = \frac{h}{b}\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{n}{m}\cot^2 q\right).$$

On trouve de la même manière

$$a'\cos\varphi - mb\sin^2\Pi = a\sin\varphi\cos\varphi + mb\cos^2\varphi - mb\cos^2\varphi$$
$$- \frac{m(b_1^2-b^2)}{a}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{nh\sin\varphi\cos\varphi}{a}\cot^2 q$$
$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{a}(a^2 - mb_1^2 + mb^2 + nh\cot^2 q$$
$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{a}(a^2 + mb^2 - a_1^2 + nh\cot^2 q)$$
$$= \frac{h}{a}\sin\varphi\cos\varphi(1 + n\cot^2 q),$$

donc

$$\frac{a'\sin\varphi - a\sin^2\Pi}{a'\cos\varphi - mb\sin^2\Pi} = \frac{\frac{a}{b}\left(1 + \frac{n}{m}\cot^2 q\right)}{1 + n\cot^2 q};$$

ce qui réduit la dernière expression de X à celle-ci:

$$X = \frac{2\pi a\sqrt{m}}{1-m}\left\{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi\right)}\int dq\sin q - \int dq\sin q\sqrt{\left(\frac{1+\frac{n}{m}\cot^2 q}{1+n\cot^2 q}\right)}\right\}.$$

On a vu dans le No. (8.), que les limites $\psi' = q'$ et $180^\circ - q'$ de q sont telles que $a_1^2 + c_1^2\operatorname{tang}^2 q' = A_1^2$. Donc en posant $\cos q = x\cos q'$, on aura

$dq \sin q = -dx \cos q'$, et par conséquent

$$X = \frac{2\pi a \sqrt{m}}{m-1} \cos q' \left\{ \sqrt{\left(\frac{b}{a} \tang \varphi\right)} \int dx - \int dx \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{n}{m} \cdot \frac{x^2 \cos^2 q'}{1 - x^2 \cos^2 q'}}{1 + \frac{n x^2 \cos^2 q'}{1 - x^2 \cos^2 q'}} \right)} \right\},$$

ou bien

$$X = \frac{2\pi a \sqrt{m}}{m-1} \cos \varphi' \left\{ \sqrt{\left(\frac{b}{a} \tang \varphi\right)} \int dx - \int dx \sqrt{\left(\frac{1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) \cos^2 q' . x^2}{1 - (1-n) \cos^2 q' . x^2} \right)} \right\}.$$

Les limites de x sont ici $+1$ et -1 et l'équation $a_1^2 + c_1^2 \tang^2 q' = A_1^2$ donne $\cos^2 q' = \frac{c_1^2}{K^2}$, en posant pour plus de simplicité

$$A_1^2 + c_1^2 - a_1^2 = K^2;$$

donc en observant que $\frac{n}{m} = \frac{b_1^2}{c_1^2}$, il viendra

$$X = \frac{4\pi a \sqrt{m} . c_1}{K(m-1)} \int_0^1 dx \left\{ \sqrt{\left(\frac{K^2 + (b_1^2 - c_1^2) x^2}{K^2 + (a_1^2 - c_1^2) x^2} \right)} - \sqrt{\left(\frac{b}{a} \tang \varphi \right)} \right\}.$$

L'équation (x'') trouvée dans le No. (8.) étant rapprochée de la valeur de $2A_1^2$ qui termine le premier §., on voit aussitôt que

$$ab \tang \varphi = A_1^2 - a^2,$$

et comme il faut ici remplacer φ par $90^\circ - \varphi$, on doit écrire $ab \cot \varphi = A_1^2 - a^2$, d'ou l'on tire

$$\frac{b}{a} \tang \varphi = \frac{b^2}{A_1^2 - a^2}.$$

Donc en substituant cette valeur, et remplaçant m par $\frac{a_1^2}{b_1^2}$, on aura, après avoir écrit M au lieu de la masse de l'ellipsoïde exprimée par $\frac{4}{3}\pi a_1 b_1 c_1$:

$$X = \frac{3aM}{K(a_1^2 - b_1^2)} \int_0^1 dx \left\{ \sqrt{\left(\frac{K^2 + (b_1^2 - c_1^2) x^2}{K^2 + (a_1^2 - c_1^2) x^2} \right)} - \frac{b}{\sqrt{(A_1^2 - a^2)}} \right\}.$$

Actuellement j'observe, que toute intégrale de la forme

$$T = \int dx \sqrt{\left(\frac{1 + m x^2}{1 + n x^2} \right)}$$

renferme une partie algébrique indépendante du signe intégral qu'on peut extraire, soit en faisant $x = \frac{\tang \varphi}{\sqrt{m}}$, soit en posant $x = \frac{\tang \varphi}{\sqrt{n}}$. Or on va voir, qu'ici il convient de prendre $x = \frac{\tang \varphi}{\sqrt{n}}$, afin de détruire la partie $\frac{b}{\sqrt{(A_1^2 - a^2)}}$. Alors on a

$$T = \frac{1}{\sqrt{n}} \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{m}{n}\right) \sin^2 \varphi\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int \frac{d\varphi . \Delta}{\cos^2 \varphi},$$

d'où l'on tire $T = \frac{1}{\sqrt{n}}(\Delta \operatorname{tang}\varphi + F - E)$, ou bien

$$T = \frac{\Delta . \operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{n}} + \frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\sqrt{n}} \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta}.$$

(Voyez p. 257 du 1[er] vol. des Fonctions elliptiques de *Legendre.*)

Donc, entre les limites $\varphi = 0$ et $\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{n}$ qui répondent à $x = 0$ et $x = 1$, on a

$$\int_0^1 dx \sqrt{\left(\frac{1+mx^2}{1+nx^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1+m}{1+n}\right)} - \frac{(m-n)}{n\sqrt{n}} \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta};$$

et en faisant $\sin\varphi = y\sqrt{\left(\frac{n}{1+n}\right)}$, cette formule se change en celle-ci:

$$\int_0^1 dx \sqrt{\left(\frac{1+mx^2}{1+nx^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1+m}{1+n}\right)} - \frac{(m-n)}{(1+n)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{\left\{\left[1-\frac{n}{1+n}y^2\right]\left[1+\frac{m-n}{1+n}y^2\right]\right\}}}.$$

En appliquant cette formule à l'expression précédente de X où l'on a

$$m = \frac{b_1^2 - c_1^2}{K^2}, \qquad n = \frac{a_1^2 - c_1^2}{K^2},$$

il viendra

$$X = \frac{3aM}{K(a_1^2 - b_1^2)} \left\{ \frac{\sqrt{(A_1^2 + b_1^2 - a_1^2)}}{A_1} - \frac{b}{\sqrt{(A_1^2 - a^2)}} \right\}$$
$$+ \frac{3aM}{A_1} \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{[A_1^2 + (c_1^2 - a_1^2)y^2][A_1^2 + (b_1^2 - a_1^2)y^2]}}.$$

Or il est facile de démontrer, que

$$\frac{\sqrt{(A_1^2 + b_1^2 - a_1^2)}}{A_1} = \frac{b}{\sqrt{(A_1^2 - a^2)}}.$$

En effet, cette équation donne

$$0 = A_1^4 - A_1^2\{(a^2+b^2) + (a_1^2 - b_1^2)\} - a^2(b_1^2 - a_1^2);$$

d'où l'on tire

$$2A_1^2 = (a^2+b^2) + (a_1^2 - b_1^2) + \sqrt{[(a^2+b^2+a_1^2-b_1^2)^2 + 4a^2(b_1^2 - a_1^2)]}.$$

La quantité soumise au radical est telle que

$$\begin{aligned} &(a^2+b^2)^2 + (a_1^2-b_1^2)^2 + 2(a_1^2-b_1^2)(a^2+b^2-2a^2) \\ &= (a^2+b^2)^2 + (a_1^2-b_1^2)^2 - 2(a_1^2-b_1^2)(a^2-b^2) \\ &= (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 + (a_1^2-b_1^2) - 2(a_1^2-b_1^2)(a^2-b^2) \\ &= [(a^2-b^2) + (a_1^2-b_1^2)]^2 + 4a^2b^2. \end{aligned}$$

Donc cette valeur de $2A_1^2$ s'accorde avec celle trouvée à la fin du premier §. On a donc enfin

$$X = \frac{3aM}{A_1}\int_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{\{[A_1^2+(c_1^2-a_1^2)y^2][A_1^2+(b_1^2-a_1^2)y^2]\}}}:$$

résultat conforme à celui qu'on obtient par les autres méthodes indirectes et plus expéditives.

On doit comprendre maintenant que l'analyse de *Legendre* avoit besoin de ce long développement, pour pouvoir saisir plusieurs des motifs secrets qui ont guidée la marche de son calcul. J'ignore s'il est permis de soutenir, que de tels motifs peuvent être aisément devinés d'après le texte de *Legendre*.

Turin le 15 Janvier 1841.

10.

Ueber die lineäre Construction des achten Schnittpunctes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpuncte derselben gegeben sind.

(Von Hrn. Dr. *Hesse*, Priv. Doc. an der Universität zu Königsberg.)

Die Abhandlung „De curvis et superficiebus sec. ord., Bd. 20. p. 285 dieses Journals," enthält unter andern auch die Lösung der Aufgabe:

„Wenn 7 Schnittpuncte dreier Oberflächen zweiter Ordnung gegeben „sind, den achten Schnittpunct auf lineäre*) Weise zu construiren.

Dafs ich diese Aufgabe zum Gegenstande eines neuen Aufsatzes mache, geschieht in der Absicht, die Auflösung als das Resultat rein geometrischer Betrachtungen darzustellen, welche mir bei der ersten Behandlung der Aufgabe in der angeführten Abhandlung wegen der Neuheit des Gegenstandes entgangen sind.

Wir beginnen mit der Untersuchung der

Aufgabe 1.

„Es sind im Raume fünf beliebige Puncte und eine beliebige gerade „Linie gegeben: man soll die Spitze eines Kegels zweiter Ordnung „construiren, der durch die gegebenen Puncte hindurchgeht und die „gerade Linie als Kante auf seiner Mantelfläche enthält."

---

*) Um Mifsverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dafs ich unter einer lineären Construction eine solche verstehe, welche, von gegebenen Puncten ausgehend, sich in der Ebene nur der geraden Linie, im Raume nur der Ebene bedient. Wenn also z. B. ein Punct als der 4te Schnittpunct zweier Kegelschnitte bestimmt wird, von denen jeder durch fünf bekannte Puncte auf ihm gegeben ist, so wird diese Bestimmung nicht lineär zu nennen sein, wenn auch die drei andern Schnittpuncte gegeben sind. Lineäre Constructionen können im Allgemeinen nur da verlangt werden, wo durch gewisse gegebene Puncte nur ein einziger gesuchter Punct von einer bekannten Relation zu den gegebenen bestimmt ist. In diesem Sinne kann man einen beliebigen Punct der Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung, von welcher irgend 8 gegeben sind, nicht lineär, wohl aber mit Hülfe eines Kreises construiren. Dagegen läfst sich der Punct lineär bestimmen, in welchem alle Curven 3ter Ordnung zusammen kommen, welche sämmtlich durch 8 gegebene Puncte hindurchgehen.

Die gegebenen Puncte seien 2, 3, 4, 5, 6 (Taf. I. Fig. 1.), und A die gegebene gerade Linie. Bezeichnen wir alsdann mit 0 die gesuchte Spitze des Kegels, welche auf der geraden Linie A liegen mufs, weil jede Kante des Kegels durch seine Spitze hindurchgeht, so schneiden sich nach dem Satze von *Pascal* die drei Ebenenpaare 023, 056; A2, 045; A6, 034 in drei geraden Linien a, b, c, welche in einer und derselben Ebene P liegen (die genannten Ebenenpaare sind nämlich die gegenüberliegenden Seitenflächen einer sechsseitigen Pyramide, deren Kanten zugleich Kanten des Kegels sind). Umgekehrt: wenn ein Punct 0 auf der geraden Linie A gefunden wird, von der Eigenschaft, dafs die drei auf die angegebene Art construirten Linien a, b, c in einer und derselben Ebene liegen, so mufs dieser Punct 0 die gesuchte Spitze des Kegels sein. Wenn nun gleich durch die sechs Puncte und die gerade Linie A die Linien b und c nicht bekannt sind, so ist doch auf jeder dieser Linien ein Punct gegeben: auf der Linie b der Schnittpunct β der Ebene A2 und der Linie 45, und auf der Linie c der Schnittpunct γ der Ebene A6 und der Linie 34. Die Linie $\beta\gamma$ liegt aber in der Ebene P, weil die Linien b und c in ihr liegen. Von der Linie a weifs man endlich, dafs sie die Linien A, 23, 56 schneidet, und, da sie ebenfalls in der Ebene P liegt, dafs sie auch die Linie $\beta\gamma$ schneiden mufs. Unsere Aufgabe führt also darauf hinaus:

„Eine gerade Linie a zu construiren, welche vier gegebene gerade Li-
„nien A, 23, 45 und $\beta\gamma$ schneidet."

Denn wenn man diese Linie gefunden hat, so wird der Schnittpunct derselben mit der ersten Linie A die gesuchte Spitze des Kegels sein. Man bemerkt auch leicht den Zusammenhang der vorhergehenden Aufgabe mit der folgenden:

„Den Schnittpunct der geraden Linie A und eines Hyperboloïds, welches
„durch die Generatricen derselben Gattung 23, 56, $\beta\gamma$ gegeben ist, zu
„construiren."

Denn durch diesen Schnittpunct kann man eine Generatrice zweiter Gattung des genannten Hyperboloïds (23, 56, $\beta\gamma$) ziehen, welche alle Generatricen erster Gattung, mithin auch die Linien 23, 56, $\beta\gamma$ schneidet.

Es genügt, die vorgelegte Aufgabe auf die letztere zurückzuführen, von welcher der Hr. Professor *Steiner* im zweiten Bande dieses Journals pag. 268 eine sehr elegante Auflösung gegeben hat. Wir bemerken nur,

dafs die Linie A das Hyperboloïd in zwei Puncten o und O schneidet. Man kann daher zwei Kegel, die wir, wie ihre Spitzen, mit o und O bezeichnen wollen, construiren, welche auf ihrer Mantelfläche die Kante A und die gegebenen fünf Puncte enthalten. Hat man nun die Spitzen der beiden Kegel construirt, so sind unmittelbar noch fünf andere Kanten jedes dieser Kegel bestimmt. Der Satz von *Pascal* lehrt endlich, alle anderen Kanten aus fünf gegebenen zu finden. Demnach können wir auf dem angedeuteten Wege die Construction der Kegel selbst vollenden.

Die beiden Kegel o und O schneiden sich in der ihnen gemeinsamen Kante A, welche ihre Spitzen verbindet, und aufserdem in einer Curve doppelter Krümmung 23456.... Da durch die Data unserer Aufgabe die beiden Kegel o und O bestimmt sind, so wird auch ihre gemeinsame Schnittcurve dadurch gegeben sein, und wir können es unternehmen, einen beliebigen Punct dieser Curve mit Hülfe der gegebenen Bestimmungsstücke zu construiren. Zu diesem Ende bemerken wir, dafs das Hyperboloïd (23, 45, $\beta\gamma$) von der besondern Lage des Punctes 4 auf der Schnittcurve 23456.... der beiden Kegel unabhängig ist. Denn wenn man durch o und O die beiden Linien zieht, welche die Linien 23 und 56 schneiden, so werden diese und die Linie 35 für das Hyperboloïd zu drei Generatricen zweiter Gattung, durch welche das Hyperboloïd ebenfalls bestimmt ist. Zieht man demnach durch einen beliebigen Punct 7 der Schnittcurve 23456.... die Geraden 74 und 72, welche die Ebenen $A2$ und $A6$ in den Puncten $\beta'\gamma'$ schneiden, so wird die Gerade $\beta'\gamma'$ zu einer Generatrice erster Gattung. Umgekehrt: wenn man durch die Schnittpuncte β' und γ' einer beliebigen Generatrice erster Gattung, mit den Ebenen $A2$ und $A6$ die Linien $\beta'5$ und $\gamma'3$ zieht, so schneiden sich dieselben in einem beliebigen Puncte 7 der Curve, welcher in dem Falle, dafs man statt $\beta'\gamma'$ die Generatrice $\beta\gamma$ wählt, mit dem Puncte 4 zusammenfällt. Auf diese Weise entspricht jeder Generatrice erster Gattung ein Punct der Curve. Den Puncten 2 und 6 entsprechen die Generatricen 23 und 56. Bezeichnet man den Schnittpunct der Linie 35 und der Ebene $A2$ mit β'', so entspricht die durch diesen Punct gezogene Generatrice erster Gattung dem Puncte 3, und auf gleiche Weise entspricht die Generatrice von derselben Gattung, welche durch den Schnittpunct γ'' von 35 und $A6$ geht, dem Puncte 5.

Den durch o und O gezogenen Generatricen erster Gattung ent-

sprechen ferner die Puncte o und O. Es schneidet also die Curve 23456.... die Gerade A zwei Mal, und zwar in den Spitzen der Kegel, welche die vorgelegte Aufgabe verlangt. Wir haben also folgenden Satz:

Lehrsatz 1.

„Wenn zwei Kegel zweiter Ordnung sich in einer geraden Linie schnei-
„den, so schneiden sie sich überdies noch in einer Curve doppelter Krüm-
„mung, welche von der geraden Linie in zwei Puncten getroffen wird."

Woraus erhellt, dafs unsere Aufgabe darin besteht, diese beiden Schnittpuncte zu construiren, wenn die gerade Linie und 5 Puncte der Curve gegeben sind. Zugleich entnehmen wir aus dem Vorhergehenden die Auflösung folgender Aufgabe:

Aufgabe 2.

„Zwei Kegel zweiter Ordnung schneiden sich in einer beliebig ge-
„gebenen geraden Linie A und gehen überdies durch fünf beliebig ge-
„gebene Puncte 2, 3, 4, 5, 6: es soll ein beliebiger anderer, den beiden
„Kegeln gemeinsamer Punct 7 auf lineäre Weise construirt werden."

Dieser Punct wird auf folgende Art gefunden. Man ziehe die Linien 45 und 43, welche die Ebenen $A2$ und $A6$ respective in den Puncten β und γ schneiden. Die drei Geraden 23, 56, $\beta\gamma$ betrachte man als die Generatricen gleicher Gattung eines Hyperboloïds und construire auf denselben eine beliebige andere Generatrice gleicher Gattung. Diese schneide die Ebenen $A2$ und $A5$ in den Puncten β' und γ'. Zieht man alsdann die Linien $\beta'5$ und $\gamma'3$, so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Puncte 7.

Die in den vorhergehenden Paragraphen beschriebene Figur haben wir construirt, indem wir die fünf Puncte 2, 3, 4, 5, 6 und die gerade Linie A als beliebig gegeben annahmen. Es läfst sich aber auch diese Figur vervollständigen, wenn wir die 6 Puncte 2, 3, 4, 5, 6, 7 auf der Schnittcurve der beiden Kegel als beliebig gegeben annehmen und aufserdem die Bestimmung machen, dafs die nicht gegebene Gerade A, in welcher sich die beiden Kegel schneiden, durch einen beliebig gegebenen Punct 1 hindurchgehen soll. Dadurch ist sowohl das Hyperboloïd (23, 56, $\beta\gamma$), als auch die Gerade A bestimmt; was wir jetzt darthun wollen. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Linien $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$. Die erstere schneide die Gerade 12 in B, die andere die Gerade 16 in G. Diese beiden Puncte sind durch die gegebenen Puncte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bestimmt. Der erstere

nämlich als Schnittpunct der Geraden 12 und der Ebene 457, der andere als Schnittpunct der Geraden 16 und der Ebene 437. Es schneide ferner die Ebene 237 die Gerade 56 im Puncte G' und die Ebene 567 die Gerade 23 im Puncte B'. Alsdann sind die Geraden $\beta' B'$ und $\gamma' G'$ Generatricen von der 2ten Gattung und schneiden mithin jede Generatrice von der ersten Gattung, unter diesen auch die Gerade $\beta\gamma$. Nun haben wir aber zwei vom Puncte β' ausgehende Linien $\beta' B'$ und $\beta' \beta B$, welche die Generatrice $\beta\gamma$ schneiden; woraus wir schliefsen, dafs die Puncte β', B', β, B in derselben Ebene liegen. Mithin wird die Generatrice $\beta\gamma$ von der Geraden BB' und auf gleiche Weise von der Geraden GG' geschnitten. Dieses sind aber Geraden, welche sich durch die gegebenen Puncte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bestimmen lassen. Bemerken wir endlich, dafs die Generatrice $\beta\gamma$ in der Ebene 345 liegt, so ist es ersichtlich, dafs die genannte Ebene von den Geraden GG' und BB' in zwei Puncten dieser Generatrice getroffen wird. Durch diese Schnittpuncte ist aber die dritte Generatrice und mit ihr das ganze Hyperboloïd (23, 45, $\beta\gamma$) bekannt, zu dessen Bestimmung die beiden ersten Generatricen 23 und 45 gegeben sind.

Die Puncte $\beta\gamma$ auf der dritten Generatrice werden als die Schnittpuncte dieser Linie und der Geraden 45 und 43 gefunden. Die Gerade A bestimmt man endlich als die Schnittlinie der Ebenen 12β und 16γ.

Diese Betrachtung enthält die Lösung folgender Aufgabe:

Aufgabe. 3.

„Zwei Kegel zweiter Ordnung schneiden sich in einer Geraden A und „überdies in einer Curve doppelter Krümmung: es soll die Gerade A „construirt werden, wenn ein Punct 7 auf ihr, und 6 Puncte 2, 3, 4, 5, „6, 7 der Schnittcurve der beiden Kegel beliebig im Raume gegeben sind."

Man bestimme die Puncte

$$B = (745{,}12), \qquad G = (734{,}61),$$
$$B' = (756{,}23), \qquad G' = (723{,}56).$$

B bedeute den Schnittpunct der Ebene 745 und der Geraden 12 etc. Die Schnittpuncte der Geraden BB' und GG' mit der Ebene 345 verbinde man durch eine gerade Linie und bezeichne die Schnittpuncte dieser Linie mit den Linien 45 und 43 mit β und γ. Alsdann schneiden sich die Ebenen 16γ und 12β in der gesuchten Geraden A.

Wir wollen nun zeigen, wie mit der vorhergehenden Aufgabe zugleich die folgende gelöset ist.

Aufgabe 4.

„Es sind irgend sieben Puncte als die Schnittpuncte dreier Ober-„flächen zweiter Ordnung gegeben: man soll auf lineäre Weise den „achten Schnittpunct construiren."

Bezeichnen wir die acht Schnittpuncte dreier Oberflächen zweiter Ordnung mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und ziehen eine Gerade A durch die Puncte 1 und 8, so können wir, wie in der Auflösung der Aufgabe 1. angedeutet ist, zwei Kegel zweiter Ordnung construiren, die sich in der Geraden A schneiden und durch die fünf Puncte 2, 3, 4, 5, 6 hindurchgehen. Diese Kegel gehen aber durch die sieben Puncte 1, 8, 2, 3, 4, 5, 6 hindurch: sie gehen also auch durch den Punct 7, weil bekanntlich alle Oberflächen zweiter Ordnung, die durch sieben Puncte hindurchgehen, sich noch in einem durch diese bestimmten achten Punct schneiden. Der Punct 7 liegt also in der Curve doppelter Krümmung, in welcher sich die beiden Kegel schneiden. Nehmen wir nun die sechs auf dieser Curve gelegenen Puncte 2, 3, 4, 5, 6, 7 und den Punct 1 auf der Geraden A als gegeben an, so lehrt die Auflösung der vorhergenden Aufgabe diese Gerade A finden, welche durch den gesuchten achten Punct 8 hindurchgeht. Vertauschen wir endlich den Punct 1 mit irgend einem anderen Puncte 2, 3, 4, 5, 6, 7, so finden wir auf gleiche Weise eine zweite Gerade A, welche die erste in dem gesuchten Puncte 8 schneidet.

Um der angedeuteten Lösung der vorliegenden Aufgabe eine übersichtlichere Form zu geben, wollen wir die angestellten Betrachtungen dazu benutzen, einen Lehrsatz über die acht Schnittpuncte dreier Oberflächen zweiter Ordnung herzuleiten, aus welchem unmittelbar die Construction eines dieser Puncte, wenn die andern gegeben sind, sich ergiebt. Zu diesem Zwecke wiederholen wir, dafs die Gerade $\beta\gamma$ von der Geraden BB' (so wie von GG'') geschnitten wird. Wenn wir demnach die Endpuncte BB' der letzteren Geraden, wie vorhin, durch die übersichtlicheren Zeichen $B = (745,12)$ $B' = (756,23)$ etc. .... darstellen, so haben wir, da β der Schnittpunct von $A2$ und 45, γ der Schnittpunct von $A6$ und 34 ist, und die Puncte 1 und 8 in der Geraden A liegen, ganz analog: $\beta = (812,45)$, $\gamma = (861,34)$; woraus sich folgender Lehrsatz ergiebt:

Lehrsatz 2.

„Wenn die 8 Schnittpuncte dreier Oberflächen zweiter Ordnung mit „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bezeichnet werden, so liegen die 4 Puncte

(812,45), (861,34), (745,12), (756,23)
„oder, was dasselbe ist, die Schnittlinie (745,812) und die beiden Puncte
„(861,34) und (756,23) in einer und derselben Ebene."

Man erhält aus diesen andere Relationen, wenn man die Zeichen für die 8 Schnittpuncte beliebig vertauscht. Wir bezeichnen ferner die Gerade $\beta\gamma$ mit (812,45) (861,34) mit (IV), die Gerade BB' mit (745,12) (756,23) mit II und auf analoge Weise die Geraden:

(734,61) (745,12)	mit	I	(834,61) (845,12)	mit	(I)
(745,12) (756,23)	-	II	(845,12) (856,23)	-	(II)
(756,23) (761,34)	-	III	(856,23) (861,34)	-	(III)
(761,34) (712,45)	-	IV	(861,34) (812,45)	-	(IV)
(712,45) (723,56)	-	V	(812,45) (823,56)	-	(V)
(723,56) (734,61)	-	VI	(823,56) (834,61)	-	(VI).

Diese Ausdrücke sind so gebildet, dafs jeder folgende aus dem vorhergehenden entsteht, wenn man für 1, 2, 3, 4, 5, 6 respective 2, 3, 4, 5, 6, 1 setzt. Die ersten auf diese Weise bezeichneten sechs Linien bilden nun ein nicht ebenes Sechseck A, dessen gegenüberliegende Seiten sich schneiden. Man kann daher durch je zwei gegenüberliegende Seiten dieses Sechsecks eine Ebene legen. Diese drei Ebenen schneiden sich in dem Puncte 7. Ebenso bilden die zweiten sechs Linien ein Sechseck B. Legt man durch je zwei gegenüberliegende Seiten dieses Sechsecks eine Ebene, so schneiden sich die drei Ebenen im Puncte 8. In jedem dieser Sechsecke schneidet also jede ungerade Seite jede gerade Seite. Wenn wir aber die beiden Sechsecke mit einander vergleichen, so finden wir, dafs jede gerade Seite des einen jede gerade Seite des andern und jede ungerade Seite des einen jede ungerade Seite des andern schneidet. Denn es schneidet z. B., wie oben bemerkt wurde, die Gerade II die Gerade (IV). Da aber (IV) in II und II in (VI) übergeht, wenn man statt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 respective 5, 6, 1, 2, 3, 4, 8, 7 setzt, so schneiden sich auch II und (VI). Endlich schneiden sich die Geraden II und (II), weil beide in derselben Ebene 123 liegen, etc..... Um die Endpuncte des Sechsecks A zu bestimmen, verbinde man die Puncte 1, 2,... 6 der Reihe nach durch gerade Linien, wodurch ein Sechseck H entsteht. Jede Seite dieses Sechsecks wird von der durch die gegenüberliegende Seite und den Punct 7 gelegten Ebene in einem Puncte geschnitten, der zugleich eine Ecke des Sechsecks A ist. Ferner wird jede Seite des Sechsecks H von der durch die gegenüber-

liegende Seite und den Punct 8 gelegten Ebene in einem Puncte geschnitten, der zugleich eine Ecke des Sechsecks *B* ist. Diese Bemerkungen lassen sich nun in folgendem Satze zusammenfassen:

Lehrsatz 3.

„Von den acht Schnittpuncten dreier Oberflächen zweiter Ordnung betrachte man irgend sechs als die Ecken eines Sechsecks *H* und schneide „die aufeinander folgenden Seiten dieses Sechsecks durch Ebenen, welche „durch die gegenüberliegenden Seiten und den siebenten Schnittpunct „gelegt sind. Die Schnittpuncte der Seiten betrachte man in der Reihe, „wie sie auf den auf einander folgenden Seiten des Sechsecks *H* liegen, „als die Ecken eines zweiten Sechsecks *A*. Auf gleiche Weise bilde man „ein drittes, dem ersten *H* in dem Sinne der Peripherie einbeschriebenes „Sechseck *B*, von welchem jede Ecke in einer Seite des Sechsecks *H* „und in der durch die gegenüberliegende Seite und den achten Schnittpunct gelegten Ebene liegt. Alsdann liegen die Seiten der Sechsecke *A* und *B* auf demselben Hyperboloïd."

Wenn von diesen drei Sechsecken irgend zwei gegeben sind, so kann man durch eine leichte Construction das dritte finden. Sind nun von den acht Schnittpuncten 1, 2, ... 8 dreier Oberflächen zweiter Ordnung die sieben ersten gegeben, so sind mit ihnen auch die Sechsecke *H* und *A* gegeben. Das Sechseck *B* läſst sich aber mit Hülfe der beiden ersten leicht construiren. Legt man, nachdem man diese Construction ausgeführt hat, drei Ebenen durch die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks *B*, so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Puncte 8.

Königsberg am 10ten Mai 1843.

11.

Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus.

(Auct. *F. Joachimsthal*, Dr. phil. Berol.)

1.

Quaestiones circa lineas curvas in superficiebus curvis sitas, si per aequationes differentiales solvuntur, saepenumero peculiari difficultate impeditae sunt. Quum enim superficies curvae aequationibus inter tres coordinatas exhiberi soleant, etiam aequatio differentialis tres variabiles x, y, z earumque differentialia implicabit, atque ope aequationis superficiei una variabilium ex. gr. z cum dz, d^2z eliminari debet, quo aequationis differentialis symmetria amittitur. Nullo modo autem haec eliminatio evitari potest, nisi in singulis casibus, ubi aequatio differentialis aut est aut calculis idoneis fit differentiale completum. Cujus rei duo exempla nunc afferremus.

Aequatio differentialis secundi ordinis, qua lineae brevissimae definiuntur, ita transformari potest, ut pro superficiebus secundi gradus differentiale completum expressionis primi ordinis prodeat.

Sit $F(x, y, z) = 0$ aequatio superficiei cujusdam ad coordinatas inter se rectangulares relatae, et designemus $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ litteris X, Y, Z: est aequatio lineae brevissimae in superficie F, quum planum osculans curvae ad planum tangens superficiei normale sit

$$X(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + Y(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + Z(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$$

sive

$$1.\quad dx(Yd^2z - Zd^2y) + dy(Zd^2x - Xd^2z) + dz(Xd^2y - Yd^2x) = 0$$

et quum curva in superficiei $F = 0$ sita sit, incrementa dx, dy, dz conditionem

$$2.\quad Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

explere debent. Ex aequationibus (1.) et (2.) rationes $dx : dy : dz$ derivari possunt, aut quantitates μdx, μdy, μdz, ubi μ factorem indeterminatum denotat. Invenitur

$$\begin{aligned}\mu dx &= Z(Zd^2x - Xd^2z) - Y(Xd^2y - Yd^2x)\\ &= d^2x(X^2 + Y^2 + Z^2) - X(Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z);\end{aligned}$$

sed aequatione (2.) differentiata videmus esse

$$dXdx + dYdy + dZdz = -(Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z),$$

quo habemus

$$3. \quad \begin{cases} \mu dx = d^2x(X^2+Y^2+Z^2) + X(dXdx+dYdy+dZdz) \\ \mu dy = d^2y(X^2+Y^2+Z^2) + Y(dXdx+dYdy+dZdz) \\ \mu dz = d^2z(X^2+Y^2+Z^2) + Z(dXdx+dYdy+dZdz). \end{cases}$$

Multiplicando aequationes (3.) per dx, dy, dz et addendo, obtinemus valorem ipsius μ

$$4. \quad \mu = \frac{(X^2+Y^2+Z^2)(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)}{dx^2+dy^2+dz^2}$$

et multiplicando easdem aequationes per dX, dY, dZ et addendo

$$5. \quad \mu = \frac{(X^2+Y^2+Z^2)(dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z)}{dXdx+dYdy+dZdz} + XdX + YdY + ZdZ.$$

Quibus valoribus inter se comparatis obtinemus

$$6. \quad \frac{dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z}{dXdx+dYdy+dZdz} + \frac{XdX+Xdy+Zdz}{X^2+Y^2+Z^2} - \frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dx^2+dy^2+dz^2} = 0.$$

Quam transformationem aequationis (1.) infra accuratius examinabimus. Duas fractiones ultimas aequationis (6.) differentialia completa esse adnotandum est.

2.

Si pro $F(x, y, z) = 0$ aequatio superficierum secundi gradus sumitur

$$7. \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\alpha' yz + 2\beta' zx + 2\gamma' xy + 2\alpha'' x + 2\beta'' y + 2\gamma'' z + \delta = 0$$

etiam fractio prima formulae (6.) fit differentiale completum; nam derivatur ex aequatione (7.)

$$\begin{aligned} X &= 2(\alpha x + \gamma' y + \beta' z + \alpha'') & dX &= 2(\alpha dx + \gamma' dy + \beta' dz) \\ Y &= 2(\gamma' x + \beta y + \alpha' z + \beta'') & dY &= 2(\gamma' dx + \beta dy + \alpha' dz) \\ Z &= 2(\beta' x + \alpha' y + \gamma z + \gamma'') & dZ &= 2(\beta' dx + \alpha' dy + \gamma dz); \end{aligned}$$

ergo est

$$dXdx + dYdy + dZdz = 2(\alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dz^2 + 2\alpha' dy\,dz + 2\beta' dz\,dx + 2\gamma' dx\,dy),$$

atque vides, esse

$$dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z = d\{\alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dz^2 + 2\alpha' dy\,dz + 2\beta' dz\,dx + 2\gamma' dx\,dy\},$$

quo formula (6.) mutatur in

$$\tfrac{1}{2} d \log\{\alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dz^2 + 2\alpha' dy\,dz + 2\beta' dz\,dx + 2\gamma' dx\,dy\} - \tfrac{1}{2} d \log\{dx^2 + dy^2 + dz^2\}$$
$$+ \tfrac{1}{2} d \log\{(\alpha x + \gamma' y + \beta' z + \alpha'')^2 + (\gamma' x + \beta y + \alpha' z + \beta'')^2 + (\beta' x + \alpha' y + \gamma z + \alpha'')^2\} = 0,$$

unde obtinemus integrale primum aequationis differentialis lineae brevissimae

$$8. \quad \begin{cases} (\alpha x+\gamma' y+\beta' z+\alpha'')^2+(\gamma' x+\beta y+\alpha' z+\beta'')^2+(\beta' x+\alpha' y+\gamma z+\alpha'')^2 \\ \quad = C\dfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{\alpha dx^2+\beta dy^2+\gamma dz^2+2\alpha' dy dz+2\beta' dz dx+2\gamma' dx dy}, \end{cases}$$

ubi quantitas C est constans integrationis.

Quo ex integrali proprietates quaedam geometricae imprimis de curvatura lineae brevissimae fluunt, quas nunc exponemus.

Si brevitatis causa

$$(\alpha x+\gamma' y+\beta' z+\alpha'')^2+(\gamma' x+\beta y+\alpha' z+\beta'')^2+(\beta' x+\alpha' y+\gamma z+\gamma'')^2 = p$$
$$\alpha dx^2+\beta dy^2+\gamma dz^2+2\alpha' dy\, dz+2\beta' dz\, dx+2\gamma' dx\, dy = q$$
$$dx^2+dy^2+dz^2 = ds^2$$

ponuntur, aequationes (3.), (4.) et (8.) ita scribi possunt:

$$8.^* \quad \begin{cases} \mu dx - q(\alpha x+\gamma' y+\beta' z+\alpha'') = p d^2 x \\ \mu dy - q(\gamma' x+\beta y+\alpha' z+\beta'') = p d^2 y \\ \mu dz - q(\beta' x+\alpha' y+\gamma z+\gamma'') = p d^2 z \\ \quad \mu = p\dfrac{d^2 s}{ds}, \quad p = C\dfrac{ds^2}{q} \end{cases}$$

et quaeramus radium curvaturae, qui pro qualibet curva formula

$$\varrho = \frac{ds^2}{(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)^{\frac{1}{2}}}$$

data est. Invenitur ex aequationibus (8.*)

$$p^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2) = \mu^2 ds^2+q^2 p = p^2 d^2 s^2+q^2 p,$$

ergo est

$$p^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2) = q^2 p = \frac{C^2 ds^4}{p}$$

et

$$\frac{(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)^{\frac{1}{2}}}{ds^2} = \frac{C}{p^{\frac{3}{2}}}.$$

Radius curvaturae lineae brevissimae formula simplici data est

$$\varrho = \frac{1}{C}\{(\alpha x+\gamma' y+\beta' z+\alpha'')^2+(\gamma' x+\beta y+\alpha' z+\beta'')^2+(\beta' x+\alpha' y+\gamma z+\gamma'')^2\}^{\frac{3}{2}}.$$

Quum factor ipsius $\frac{1}{C}$ tantum a coordinatis puncti in superficie pendeat, atque pro lineis brevissimis ex eodem puncto exeuntibus idem sit, nullo negotio derivatur theorema sequens:

I. Formetur in superficie secundi gradus triangulum, cujus latera sint lineae brevissimae, et radii curvaturae singulorum laterum in angulis ex ordine per ϱ_1, ϱ_1', ϱ_2, ϱ_2', ϱ_3, ϱ_3' designentur, producta e tribus radiis

non contiguis conflata aequalia sunt, sive

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = \varrho_1'\varrho_2'\varrho_3'.$$

3.

Sed integrale primum ipsum interpretationem geometricam admittit, unde ad formulam pro radio curvaturae facile perveniri potest.

Simplicitatis causa sit aequatio superficiei secundi gradus haecce

$$10. \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

quo integrale primum (8.) mutatur in

$$11. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = C\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}}.$$

Fingemus diametrum superficiei, cujus aequatio sit $\xi:\eta:\zeta = l:m:n$, sunt coordinatae punctorum in quibus superficies a diametro secatur $\pm\frac{l}{\sigma}$, $\pm\frac{m}{\sigma}$, $\pm\frac{n}{\sigma}$ et $\sigma = \left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$, ergo longitudo semidiametri aequalis $\frac{(l^2+m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$, unde videmus $\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}\right)^{\frac{1}{2}}}$ esse longitudinem semidiametri D, cujus directio tangenti lineae brevissimae parallela est. Designemus littera P distantiam centri a plano tangenti superficiei in puncto (x, y, z) sive a plano $\frac{\xi x}{a}+\frac{\eta y}{b}+\frac{\zeta z}{c} = 1$, habemus formulis notis $P^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}$, ergo loco aequationis (11.) scribi potest $\frac{1}{P^2} = CD^2$, sive $PD = \frac{1}{\sqrt{C}}$, quae relatio hoc modo pronuntiari licet:

II. Sint A, A' duo puncta superficiei secundi gradus, P, P' distantiae centri a planis tangentibus in his punctis, D, D' semidiametri superficiei, quarum directiones tangentibus lineae brevissimae per A et A' ductae in A et A' parallelae, habemus $PD = P'D'$.

Quam relationem cum theoremate noto de sectionibus conicis fere congruere adnotare juvat, scilicet cum theoremate de parallelogrammatis sectioni conicae circumscriptis et diametris conjugatis superstructis. Quum planum osculans lineae brevissimae per normalem superficiei transeat, curvatura lineae brevissimae curvaturae sectionis planae aequalis est, quae per normalem superficiei et tangentem lineae brevissimae ducitur. De sectionibus

per normalem in puncto quodam A superficiei secundi gradus ductis valet theorema, curvaturam in eodem puncto esse aequalem quantitati $\frac{P}{D^2}$, litteris P et D similia ut supra significantibus. Quum pro lineis brevissimis inter P et D relatio $PD = \frac{1}{\sqrt{C}}$ intercedat, curvatura K sive $\frac{P}{D^2}$ mutatur in P^3C, qui valor cum valore ipsius $\frac{1}{\varrho}$ e formula (9.) derivata omnino congruit. Habemus igitur theorema sequens:

III. Sint A, A' duo puncta superficiei secundi gradus, P, P' distantiae centri a planis tangentibus, K, K' curvaturae lineae brevissimae per A et A' ductae in his punctis, habetur relatio

$$\frac{K}{K'} = \frac{P^3}{P'^3}.$$

Nec non existit theorema simile de sectionibus conicis, scilicet hoc sequens: sint A, A' duo puncta sectionis conicae, P, P' distantiae centri a tangentibus; (K), (K') curvaturae sectionis conicae in his punctis, a, b semiaxes curvae, habetur $(K) = \frac{P^3}{a^2b^2}$, $(K) = \frac{P'^3}{a^2b^2}$, ergo $\frac{(K)}{(K')} = \frac{P^3}{P'^3}$. Si superficies secundi gradus rotatione orta est, quum planum tangens ad meridianum normale sit, perpendiculum a centro ad planum tangens ductum, idem est, atque perpendiculum a centro ad tangentem meridiani. Est autem, si iisdem designationibus, ut supra utimur, $K = CP^3$, $(K) = \frac{P^3}{a^2b^2}$, ergo $\frac{K}{(K)} = Ca^2b^2$, sive:

IV. In superficiebus secundi gradus rotatione ortis ratio curvaturae lineae brevissimae ad curvaturam meridiani pro singulis lineis brevissimis immutata manet.

Quod theorema pro linea geodetica cl. *Gudermann* proposuit. (Cf. hoc diarium T. XVII.) Quum sectiones per normalem superficiei ductae, quae cum sectionibus principalibus angulos aequales efficiunt, curvatura aequali gaudeant, derivatur e theoremate (I.) tanquam corollarium:

V. Si in superficie secundi gradus triangulus formatur, cujus latera sunt lineae brevissimae et duo anguli sectionibus principalibus dimidiantur, etiam tertius angulus per sectiones principales in partes aequales dividitur.

4.

Si integrale completum aequationis differentialis lineae brevissimae, quod praeter C adhuc aliam constantem arbitrariam amplectitur nancisci volumus, ex integrali primo (11.) ope relationum $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$,

$\frac{x\,dx}{a}+\frac{y\,dy}{b}+\frac{z\,dz}{c}=0$ una variabilium eliminari debet, qua aequationem differentialem primi ordinis obtinemus, quae nisi relatione satis complicata integrari nequit.

Dedit autem vir celeberrimus *Jacobi* formulas memorabiles, quibus coordinatae puncti ellipsoïdae tanquam functiones duarum variabilium, quae sunt argumenta curvarum curvaturae, exhibentur, atque integrationem completam aequationis lineae brevissimae proposuit. Quam hic paucis verbis demonstratam adjungimus, quum facile ex illo integrali primo (**11.**) sequatur.

Illae formulae sunt

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{c-a}\right)}\sin\varphi\,\sqrt{(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-a)},$$
$$y=\sqrt{b}\,.\sin\psi\cos\varphi,$$
$$z=\sqrt{\left(\frac{c}{c-a}\right)}\cos\psi\,\sqrt{(c-b\sin\varphi^2-a\cos\varphi^2)},$$

e quibus levi calculo eruuntur

$$abc\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=(a\cos\varphi^2+b\sin\varphi^2)(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2),$$

$$dx^2+dy^2+dz^2=$$
$$\{(b-a)\cos\varphi^2+(c-b)\sin\psi^2\}\left\{\frac{(a\cos\varphi^2+b\sin\varphi^2)\,d\varphi^2}{c-b\sin\varphi^2-a\cos\varphi^2}+\frac{(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2)\,d\psi^2}{c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-a}\right\},$$

$$\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}=$$
$$\{(b-a)\cos\varphi^2+(c-b)\sin\psi^2\}\left\{\frac{d\varphi^2}{c-b\sin\varphi^2-a\cos\varphi^2}+\frac{d\psi^2}{c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-a}\right\}.$$

Quibus valoribus substitutis integrale primum (**11.**) mutatur in

$$(a\cos\varphi^2+b\sin\varphi^2)(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2)\left\{\frac{d\varphi^2}{c-b\sin\varphi^2-a\cos\varphi^2}+\frac{d\psi^2}{c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-a}\right\}$$
$$=abcC\left\{\frac{(a\cos\varphi^2+b\sin\varphi^2)\,d\varphi^2}{c-b\sin\varphi^2-a\cos\varphi^2}+\frac{(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2)\,d\psi^2}{c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-a}\right\},$$

aut in

$$\frac{(a\cos\varphi^2+b\sin\varphi^2)(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-abcC)\,d\varphi^2}{c-b\sin\varphi^2-a\cos\varphi^2}$$
$$+\frac{(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2)(a\cos\varphi^2+b\sin\varphi^2-abcC)\,d\psi^2}{c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-a}=0,$$

unde statim ad integrale completum pervenitur

$$\alpha=\int\frac{(a\cos\varphi^2+b\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi}{(c-b\sin\varphi^2-a\cos\varphi^2)^{\frac{1}{2}}(abcC-a\cos\varphi^2-b\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\int\frac{(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2)^{\frac{1}{2}}\,d\psi}{(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-a)^{\frac{1}{2}}(c\sin\psi^2+b\cos\psi^2-abcC)^{\frac{1}{2}}}.$$

Quod est integrale ab ill. *Jacobi* propositum, si ponitur $abcC = b - \beta$. (Cf. hoc diar. T. XIX.) Constans arbitraria C directione lineae brevissimae in quolibet puncto determinatur, ut relatione supra inventa $PD = \frac{1}{\sqrt{C}}$ perspicuum est.

5.

Aequationem lineae brevissimae $V = 0$, ubi ponitur

$$V = d^2x(Ydz - Zdy) + d^2y(Zdx - Xdz) + d^2z(Xdy - Ydx),$$

in aliam transformavimus (6.)

$$\frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{XdX + YdY + ZdZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0.$$

Quae fractiones si in unam conjunguntur $\frac{P}{Q} = 0$, ubi Q est productum e singulis denominatoribus, et numerator P cum V comparatur, mox invenies, P esse producto VW aequale, ubi

$$W = dX(Ydz - Zdy) + dY(Zdx - Xdz) + dZ(Xdy - Ydx).$$

Transformatio igitur aequationis differentialis lineae brevissimae in eo consistit, quod $V = 0$ per factorem $\frac{W}{Q}$ multiplicetur. Neque ineleganter haec multiplicatio transigitur ope formulae memorabilis, quae docet, productum e factoribus

$$l(m'n'' - m''n') + l'(m''n - mn'') + l''(mn' - m'n),$$
$$\lambda(\mu'\nu'' - \mu''\nu') + \lambda'(\mu''\nu - \mu\nu'') + \lambda''(\mu\nu' - \mu'\nu)$$

conflatum, esse

$$A(B'C'' - B''C') + B(C'A'' - C''A') + C(A'B'' - A''B'),$$

ubi sunt

$$\begin{array}{lll} A = l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'', & A' = l\mu + l'\mu' + l''\mu'', & A'' = l\nu + l'\nu' + l''\nu'', \\ B = m\lambda + m'\lambda' + m''\lambda'', & B' = m\mu + m'\mu' + m''\mu'', & B'' = m\nu + m'\nu' + m''\nu'', \\ C = n\lambda + n'\lambda' + n''\lambda'', & C' = n\mu + n'\mu' + n''\mu'', & C'' = n\nu + n'\nu' + n''\nu'', \end{array}$$

Substitutis valoribus ipsorum $l, m, n, \ldots$ ex expressionibus V et W, ut in hoc paragrapho scriptae sunt, sumtis, habemus

$$B'' = C' = Xdx + Ydy + Zdz = 0;$$
$$A' = Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = -(dXdx + dYdy + dZdz),$$

ergo fit

$$\begin{aligned} VW = & (X^2 + Y^2 + Z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z) \\ & + (XdX + YdY + ZdZ)(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dXdx + dYdy + dZdz) \\ & - (X^2 + Y^2 + Z^2)(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)(dXdx + dYdy + dZdz) \end{aligned}$$

unde $\frac{VW}{Q}$ cum laeva parte aequationis (6.) congruere videmus.

Notatu autem perdignum est, quum $\frac{VW}{Q}$ pro superficiebus secundi gradus fiat differentiale completum expressionis primi ordinis, aeque ac aequationis secundi ordinis $V=0$ integrale primum nacti sumus, multiplicatione per $\frac{W}{Q}$ instituta, aequationem primi ordinis $W=0$ pro iisdem superficiebus, multiplicatione per $\frac{V}{Q}$ facta, integrari posse. Neque ullus novus calculus necesse est, nisi eliminatio ipsorum dx, dy, dz ex aequationibus $W=0$, $\frac{x}{a}dx+\frac{y}{b}dy+\frac{z}{c}dz=0$ atque relatione $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=C\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}}$.

Nec non sine negotio ab aequatione $W=0$ simili modo ad aequationem $\frac{VW}{Q}=0$ pervenire possumus, ut in §. 1. ab aequatione $V=0$.

Nam aequationes

$$dx(ZdY-YdZ)+dy(XdZ-ZdX)+dz(YdX-XdY)=0,$$
$$Xdx+Ydy+Zdz=0$$

et hoc systemate aequationum repraesentari possunt, in quo μ factorem indeterminatum denotat

$$\mu dx=(X^2+Y^2+Z^2)dX-X(XdX+YdY+ZdZ),$$
$$\mu dy=(X^2+Y^2+Z^2)dY-Y(XdX+YdY+ZdZ),$$
$$\mu dz=(X^2+Y^2+Z^2)dZ-Z(XdX+YdY+ZdZ).$$

Multiplicando has aequationes per dx, dy, dz et addendo obtinemus

$$\mu(dx^2+dy^2+dz^2)=(X^2+Y^2+Z^2)(dXdx+dYdy+dZdz),$$

atque multiplicando per d^2x, d^2y, d^2z et addendo,

$$\mu(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)=(X^2+Y^2+Z^2)(dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z)$$
$$+(dXdx+dYdy+dZdz)(XdX+YdY+ZdZ),$$

unde obtinemus dividendo

$$\frac{dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z}{dXdx+dYdy+dZdz}+\frac{XdX+YdY+ZdZ}{X^2+Y^2+Z^2}-\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dx^2+dy^2+dz^2}=0,$$

ut supra

6.

Aequatio $W=0$ ad curvas curvaturae pertinet, quae nota proprietate gaudent, lineae normales superficiei in duobus punctis infinite propinquis et in his curvis sitis ductae concurrere. Est enim aequatio lineae normalis in puncto x, y, z,

$$\xi-x:\eta-y:\zeta-z=X:Y:Z$$

et in puncto infinite propinquo

$$\xi-x-dx:\eta-y-dy:\zeta-z-dz=X+dX:Y+dY:Z+dZ.$$

Quae aequationes etiam hoc modo repraesentari possunt:

$$\xi - x = \lambda X \qquad \xi - x = dx + \mu(X + dX)$$
$$\eta - y = \lambda Y \qquad \eta - y = dy + \mu(Y + dY)$$
$$\zeta - z = \lambda Z \qquad \zeta - z = dz + \mu(Z + dZ).$$

Si hae lineae rectae punctum quoddam commune habent, pro hoc puncto fieri debet

$$\lambda X = dx + \mu(X + dX),$$
$$\lambda Y = dy + \mu(Y + dY),$$
$$\lambda Z = dz + \mu(Z + dZ),$$

unde eliminando quantitates λ et μ aequatio prodit

$$dx(ZdY - YdZ) + dy(XdZ - ZdX) + dz(YdX - XdY) = 0,$$

sive $W = 0$. Si aequatio superficiei ad formam simpliciorem $f(x, y) - z = 0$ reducta est, aut, quod fere idem, si de projectione curvarum curvaturae agitur, et positis

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = -1,$$
$$dX = rdx + sdy; \quad dY = sdx + tdy; \quad dZ = 0$$

aequatio $W = 0$ in aliam magis usitatam redit,

$$dy^2\{(1 + q^2)s - pqt\} + dx\,dy\{(1 + q^2)r - (1 + p^2)t\} - dx^2\{(1 + p^2)s - pqr\} = 0.$$

Pro superficie secundi gradus $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, aequatio $W = 0$ fit

$$13. \quad dx\left(\frac{z}{c}.\frac{dy}{b} - \frac{y}{b}.\frac{dz}{c}\right) + dy\left(\frac{x}{a}.\frac{dz}{c} - \frac{z}{c}.\frac{dx}{a}\right) + dz\left(\frac{y}{b}.\frac{dx}{a} - \frac{x}{a}.\frac{dy}{b}\right) = 0$$

sive

$$14. \quad dy\,dz(c - b)x + dz\,dx(a - c)y + dx\,dy(b - a)z = 0.$$

Adsumta relatione $\frac{x}{a}dx + \frac{y}{b}dy + \frac{z}{c}dz = 0$, rationes $dx : dy : dz$, quae curvarum directiones determinant, erui possunt. Quum autem aequatio tangentis in puncto cujuslibet curvae sit

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = dx : dy : dz,$$

videmus tangentes curvarum curvaturae aequationibus

$$15. \quad (\eta - y)(\zeta - z)(c - b)x + (\zeta - z)(\xi - x)(a - c)y + (\xi - x)(\eta - y)(b - a)z = 0,$$

$$16. \quad (\xi - x)\frac{x}{a} + (\eta - y)\frac{y}{b} + (\zeta - z)\frac{z}{c} = 0$$

exhibentur, sive tanquam intersectiones coni (15.) et plani (16.) (tangentis videlicet superficiei) per illius cuspidem transeuntis. In cono (15.) innumerabiliter tria latera inter se rectangularia inveniuntur, ex. gr. lineae rectae quae per punctum x, y, z axibus superficiei parallelae ducuntur. Quum enim expressiones $(\xi - x)^2$, $(\eta - y)^2$, $(\zeta - z)^2$ in aequatione coni desint, notum

est, conum plano, per cuspidem transeunti et ad latus quoddam normali in duobus lateribus inter se rectangularibus secari. Tale planum est planum tangens (16.), quod per cuspidem coni transit, et ad latus coni $\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{x}{a} : \frac{y}{b} : \frac{z}{c}$ sive ad normalem superficiei secundi gradus perpendiculare est; directiones curvarum curvaturae igitur inter se rectangulares sunt. Quod theorema notissimum simili modo pro omnibus superficiebus ex aequatione generali $W = 0$ derivari potuisset.

Conus (15.) variis proprietatibus praeditus est, ex. gr. omnia puncta quorum normales normalem puncti (x, y, z) secant, in intersectione coni et superficiei secundi gradus sita sunt.

7.

Relationem

$$\frac{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}\right)}{dx^2+dy^2+dz^2} = C$$

non solum ad lineas brevissimas, sed etiam ad curvas curvaturae pertinere supra ostendimus. Quae curvae quum aequatio differentiali primi ordinis (13.)

$$dx\left(\frac{z}{c}.\frac{dy}{b}-\frac{y}{b}.\frac{dz}{c}\right)+dy\left(\frac{x}{a}.\frac{dz}{c}-\frac{z}{c}.\frac{dx}{a}\right)+dz\left(\frac{y}{b}.\frac{dx}{a}-\frac{x}{a}.\frac{dy}{b}\right) = 0$$

definiantur, ex his duobus aequationibus ope relationis $\frac{x}{a}dx+\frac{y}{b}dy+\frac{z}{c}dz = 0$ differentialia dx, dy, dz eliminare, atque integrale aequationis (13.) nancisci possumus. Quam eliminationem nunc adgrediamur.

Ponamus

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = p, \quad \frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}+\frac{z\,dz}{c^2} = q,$$

ex illis tribus aequationibus calculo jam saepius adhibito invenitur

$$\begin{aligned} C\,dx &= p\frac{dx}{a}-q\frac{x}{a} & \qquad dx &= \frac{xq}{p-aC}. \\ C\,dy &= p\frac{dy}{b}-q\frac{y}{b} \quad \text{sive} & dy &= \frac{yq}{p-bC}, \\ C\,dz &= p\frac{dz}{c}-q\frac{z}{c} & dz &= \frac{zq}{p-cC}. \end{aligned}$$

Multiplicando has aequationes per $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $\frac{z}{c^2}$ et addendo, quum pars laeva ipsi q aequalis fiat, habemus

$$1 = \frac{\frac{x^2}{a^2}}{p-aC}+\frac{\frac{y^2}{b^2}}{p-bC}+\frac{\frac{z^2}{c^2}}{p-cC}.$$

Quae aequatio differentialibus libera cum aequatione superficiei secundi gradus combinata curvam curvaturae determinat. Sed in simpliciorem formam redigi potest. Reducitur primo ad

$$p^3 - C(a+b+c)p^2 + C^2(bc+ca+ab)p - abc\,C^3$$
$$= p^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) - pC\left\{(b+c)\frac{x^2}{a^2}+(c+a)\frac{y^2}{b^2}+(a+b)\frac{z^2}{c^2}\right\}$$
$$+C^2\left\{bc\frac{x^2}{a^2}+ca\frac{y^2}{b^2}+ab\frac{z^2}{c^2}\right\}$$
$$= p^3-(a+b+c)Cp^2+pC\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)+C^2\left\{bc\frac{x^2}{a^2}+ca\frac{y^2}{b^2}+ab\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

sive ad

$$C^2(bc+ca+ab)p - abc\,C^3 = pC\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)+C^2\left\{bc\frac{x^2}{a^2}+ca\frac{y^2}{b^2}+ab\frac{z^2}{c^2}\right\},$$

vel quum sit $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$, $p=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ aequatio transit in sequentem

$$18.\quad C^2\left\{(b+c)\frac{x^2}{a}+(c+a)\frac{y^2}{b}+(a+b)\frac{z^2}{c}\right\}-abc\,C^3 = C\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right\}.$$

Est autem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$
$$=\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{x^2}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{y^2}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)-\frac{z^2}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

sive

$$abc\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=(ab+ac+bc)-x^2(b+c)-y^2(c+a)-z^2(a+b),$$

atque

$$(b+c)\frac{x^2}{a}+(c+a)\frac{y^2}{b}+(a+b)\frac{z^2}{c}=(a+b+c)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)-(x^2+y^2+z^2)$$
$$= a+b+c-(x^2+y^2+z^2).$$

Quocirca aequatio (18.), si per $a^2b^2c^2$ multiplicatur, mutatur in sequentem:

$$a^2b^2c^2C^2\{a+b+c-x^2-y^2-z^2\}-a^3b^3c^3C^3$$
$$= abc\,C\{ab+ac+bc-x^2(b+c)-y^2(c+a)-z^2(a+b)\},$$

sive in hanc

$$-abc\,C(ab+ac+bc)+a^2b^2c^2C^2(a+b+c)-a^3b^3c^3C^3$$
$$= -abc\,C\{x^2(b+c)+y^2(c+a)+z^2(a+b)\}+a^2b^2c^2C^2(x^2+y^2+z^2),$$

quae congruit cum

$$(a-abc\,C)(b-abc\,C)(c-abc\,C)-abc$$
$$= (b-abc\,C)(c-abc\,C)x^2+(c-abc\,C)(a-abc\,C)y^2$$
$$+(a-abc\,C)(b-abc\,C)z^2-bcx^2-cay^2-abz^2,$$

vel quum sit

$$abc = bcx^2 + cay^2 + abz^2,$$

haec ultima aequatio denique mutatur in

$$19. \quad \frac{x^2}{a - abcC} + \frac{y^2}{b - abcC} + \frac{z^2}{c - abcC} = 1.$$

Quod est theorema viri clar. *Dupin* intersectiones superficierum confocalium secundi gradus esse curvas curvaturae.

Varia theoremata adhuc exstant, quae tanquam amplificationes theorematis modo demonstrati spectanda sunt, ex gr. hoc sequens: si normales punctorum A et B superficiei secundi gradus concurrunt, linea recta AB quamlibet superficiem confocalem in duobus punctis eadem proprietate gaudentibus secat. Quae nunc praeterimus.

8.

Ex illis, quae supra exposita sunt, sequitur, ut etiam pro curvis curvaturae relatio $PD = \frac{1}{\sqrt{C}}$ valeat, litteris P et D similia ut supra denotantibus. Diametri autem duobus tangentibus curvarum curvaturae in quolibet puncto superficiei secundi gradus parallelae axes principales sectionis conicae S sunt, quae superficie secundi gradus et plano diametrali plano tangenti parallelo determinatur. Quod theorema elegans itidem viro clar *Dupin* debetur, atque hoc modo demonstrari potest.

Ut vides, axes principales sectionis conicae, aequationibus

$$20. \quad \begin{cases} (A)\ \frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} - 1 = 0, \\ (B)\ \frac{\xi x}{a} + \frac{\eta y}{b} + \frac{\zeta z}{c} = 0 \end{cases}$$

exhibitae, sive coordinatae ξ, η, ζ punctorum, quibus axes terminantur, quaerendae sunt. Quum axes sectionis conicae diametri maximi et minimi sint, quantitas $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ maximum et minimum fieri debet, ergo ad determinationem quantitatum $\xi : \eta : \zeta$ praeter $(A) = 0$, $(B) = 0$ novam aequationem obtinemus, si, positis $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \lambda(A) + \mu(B) = V$, ubi λ et μ sunt constantes, ex aequationibus $\frac{dV}{d\xi} = 0$, $\frac{dV}{d\eta} = 0$, $\frac{dV}{d\zeta} = 0$, λ et μ eliminantur, quod e theoria maximorum notum est. Habemus autem

$$\tfrac{1}{2}\frac{dV}{d\xi} = \xi + \lambda\frac{\xi}{a} + \frac{\mu}{2}\cdot\frac{x}{a} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dV}{d\eta} = \eta + \lambda\frac{\eta}{b} + \frac{\mu}{2}\cdot\frac{y}{b} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{dV}{d\zeta} = \zeta + \lambda\frac{\zeta}{c} + \frac{\mu}{2}\cdot\frac{z}{c} = 0,$$

atque eliminatis λ et μ obtinemus

$$x\eta\zeta(b-c)+y\zeta\xi(c-a)+z\xi\eta(a-b)=0.$$

Quae aequatio cum aequatione $B=0$ conjuncta, duas lineas rectas, scilicet axes sectionis conicae S, determinat; has autem tangentibus curvarum curvaturae, quae aequationibus (15.) et (16.) exhibeantur, parallelas esse, manifestum est.

Nullo calculo usi essemus praemisso theoremate supra laudato: curvaturam sectionis normalis quantitati $\frac{P}{D^2}$ aequalem esse; quum enim tangentes curvarum curvaturae directiones maximae et minimae curvaturae determinent, statim sequitur, ut axibus ipsius S parallelae sint. Nec non hujus theorematis variae amplificationes exstant, de quibus per aliam occasionem agemus.

9.

Si semiaxes sectionis conicae S per D, D' designantur, habemus $PDD'=\sqrt{(abc)}$, quum parallelepipeda superficiei secundi gradus circumscripta, et tribus diametris conjugatis superstructa producto e axibus superficiei conflato aequalia sunt. Sed supra invenimus $PD=\frac{1}{\sqrt{C}}$, ergo habemus $D'=\sqrt{(abcC)}$. Si igitur in duobus punctis A_1, A_2 in eadem curva curvaturae sitis, tangentes T_1, T_2 curvarum curvaturae alterius systematis ducuntur, diametri D'_1, D'_2 tangentibus T_1, T_2 parallelae inter se aequales sunt. Sed omnes illae tangentes T_1, T_2, quae, ut manifestum est, ad tangentes curvae curvaturae per puncta A_1, A_2 transeuntis, normales sunt, superficiem in planum explicabilem formant, ut cl. ***Dupin*** primus demonstravit; ergo habemus theorema sequens:

VI. Si superficiei secundi gradus superficies in planum explicabilis circumscribitur, et curva tactionis est curva curvaturae superficiei secundi gradus, diametri lateribus superficiei explicabilis parallelae, inter se aequales sunt.

Secundum formulam (19.) curva curvaturae pro qua est $D'=\sqrt{(abcC)}$ intersectio superficierum confocalium est

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1,\qquad \frac{x^2}{a-abcC}+\frac{y^2}{b-abcC}+\frac{z^2}{c-abcC}=1,$$

ergo habemus theorema, e quo praecedens tanquam corollarium fluit:

VII. Ducatur per centrum superficiei secundi gradus

$$(K)\qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0$$

planum, plano tangenti superficiei in puncto A parallelum; et sint D, D'

semiaxes principales sectionis conicae superficiei (K) et illo plano determinatae; habentur sequentes aequationes superficierum confocalium per A transeuntium,

$$(L)\qquad \frac{x^2}{a-D'^2}+\frac{y^2}{b-D'^2}+\frac{z^2}{c-D'^2}=1,$$

$$(M)\qquad \frac{x^2}{a-D^2}+\frac{y^2}{b-D^2}+\frac{z^2}{c-D^2}=1,$$

et adnotandum est, tangentem intersectionis ipsarum (L) et (K) in puncto A semiaxi D, et ipsarum (M) et (K) semiaxi D' esse parallelam.

E praecedentibus sponte fluit, omnes lineas brevissimas, relationi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=C.\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}}$$

satisfacientes, eandem curvam curvaturae tangere, relationibus

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a-abcC}+\frac{y^2}{b-abcC}+\frac{z^2}{c-abcC}=1$$

determinatam. Quibus aequationibus, quum duae curvae curvaturae symmetrice sitae determinentur, vides illas lineas brevissimas inter has curvas innumeras facere spiras. Fieri potest, si $abcC$ major est quantitatibus a, b, c, illas curvas curvaturae esse imaginarias; i. e. lineas brevissimas tali valore constantis C determinatas nullam curvam curvaturae tangere. Quod in hyperboloïdis contingere potest, sed nunquam in ellipsoïda, ubi $abcC$ maximam quantitatum a, b, c superare nequit. Quae quum manifesta sint, adnotasse sufficit.

10.

E praecedentibus novum neque inelegans theorema derivatur scilicet sequens cum ejus inversione:

VIII. Si planum tangens ad ellipsoïdam ita movetur, ut in superficie ellipsoïdae curvam curvaturae describat, summa aut differentia angulorum, quos planum tangens cum utraque directione sectionum circularium efficit, immutata manet.

Quae propositio, si considerationibus analyticis uti mavis, hoc modo demonstrari potest.

Sit aequatio ellipsoïdae $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$, quae conjuncta cum sequenti

$$\frac{x^2}{a-k}+\frac{y^2}{b-k}+\frac{z^2}{c-k}=1$$

curvam curvaturae exhibet. Si per initium coordinatarum lineae rectae

ducuntur, normalibus in iis punctis superficiei, quae curvam curvaturae constituunt, parallelae, conus secundi gradus oritur.

Est enim aequatio illarum rectarum

$$\frac{xa}{x_1} = \frac{yb}{y_1} = \frac{zc}{z_1}$$

sed

$$\frac{x_1^2}{a-k} + \frac{y_1^2}{b-k} + \frac{z_1^2}{c-k} - \left(\frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b} + \frac{z_1^2}{c}\right) = 0,$$

ergo aequatio coni

$$\frac{x^2 a}{a-k} + \frac{y^2 b}{b-k} + \frac{z^2 c}{c-k} = 0;$$

et aequationes linearum focalium, quae ut scis, cum omnibus lateribus coni angulos efficiunt constantis summae aut differentiae, formulis notis inveniuntur sequentes

$$\sqrt{\left(\frac{c-b}{c}\right)}x \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{a}\right)}z = 0.$$

Omnes ejusmodi conos iisdem lineis focalibus ad directiones sectionum circularium perpendicularibus gaudere vides, unde theorema propositum sponte fluit.

11.

Coronidis loco quum de superficiebus confocalibus sive ex iisdem focis descriptis saepe locuti simus, novas aequationes conditionales inter coefficientes talium superficierum adjungamus.

Exhibeantur superficies aequationibus

$$21.\quad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 1,$$

$$22.\quad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2d'yz + 2e'zx + 2f'xy = 1.$$

Quum superficies, ut notum est, inter se rectangulares sint, puncta curvae intersectionis conditionem explere debent

$$0 = (ax + fy + ez)(a'x + f'y + e'z) + (fx + by + dz)(f'x + b'y + d'z) + (ex + dy + cz)(e'x + d'y + c'z).$$

Subtrahendo aequationes (21.) et (22.) obtinemus

$$0 = (a-a')x^2 + (b-b')y^2 + (c-c')z^2 + 2(d-d')yz + 2(e-e')zx + 2(f-f')xy.$$

Quae aequatio quum praecedenti congruere debeat, habemus aequationes conditionales, in quibus μ factorem indeterminatum designat:

$$aa' + ff' + ee' = \mu(a-a'), \quad af' + a'f + fb' + f'b + ed' + e'd' = 2\mu(f-f'),$$

$$ff' + bb' + dd' = \mu(b-b'), \quad ae' + a'e + fd' + f'd + ec' + e'c = 2\mu(e-e'),$$

$$ee' + dd' + cc' = \mu(c-c'), \quad fe' + f'e + bd' + b'd + dc' + d'c = 2\mu(d-d').$$

Elegantiores nanciscimur aequationes ope theorematis sequentis:

IX. Si planum ita movetur, ut productum e distantiis plani a centro superficiei secundi gradus datae et a polo respectu hujus superficiei immutatum maneat: planum mobile superficiem tangit ex iisdem focis descriptam atque data.

Cujus propositionis demonstratio, aequatione superficiei in formam simplicem (10.) reducta, nullo negotio peragitur.

Sit (x, y, z) punctum superficiei (22.) habemus aequationem plani tangentis in hoc puncto

$$23.\quad (a'x+f'y+e'z)\xi+(f'x+b'y+d'z)\eta+(e'x+d'y+c'z)\zeta = 1,$$

et sit (l, m, n) polus hujus plani respectu superficiei (21.); aequatio (23.) cum sequenti congruere debet:

$$24.\quad (al+fm+en)\xi+(fl+bm+dn)\eta+(el+dm+cn)\zeta = 1,$$

ergo coordinatas l, m, n aequationibus determinatas vides hisce:

$$25.\quad \begin{cases} al+fm+en = a'x+f'y+e'z, \\ fl+bm+dn = f'x+b'y+d'z, \\ el+dm+cn = e'x+d'y+c'z. \end{cases}$$

Scribatur brevitatis gratia

$$26.\quad \begin{cases} abc-ad^2-be^2-cf^2+2def=\Delta, & a'b'c'-a'd'^2-b'e'^2-c'f'^2+2d'e'f' \\ bc-d^2 = A, & b'c'-d'^2 = A', \\ ca-e^2 = B, & c'a'-e'^2 = B', \\ ab-f^2 = C, & a'b'-f'^2 = C', \\ ef-ad = D, & e'f'-a'd' = D', \\ fd-be = E, & f'd'-b'e' = E', \\ de-cf = F, & d'e'-c'f' = F', \end{cases}$$

$$27.\quad \begin{cases} a'x+f'y+e'z = P, \\ f'x+b'y+d'z = Q, \\ e'x+d'y+c'z = R. \end{cases}$$

E (25.) derivantur aequationes

$$28.\quad \begin{cases} \Delta l = AP+FQ+ER, \\ \Delta m = FP+BQ+DR, \\ \Delta n = EP+DQ+CR, \end{cases}$$

et distantia δ puncti (l, m, n) a plano (23.)

$$\delta = \pm\frac{Pl+Qm+Rn-1}{(P^2+Q^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{AP^2+BQ^2+CR^2+2DQR+2ERP+2FPQ-\Delta}{(P^2+Q^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Distautia δ' centri ab eodem plauo (23.) est aequalis

$$\delta' = \pm \frac{1}{(P^2+Q^2+R^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et quum productum $\delta\delta'$ quautitati constanti H aequale sit, habemus

$$\varDelta H(P^2+Q^2+R^2) = AP^2+BQ^2+CR^2+2DQR+2ERP+2FPQ-\varDelta$$

sive

$$29.\quad 1 = \left(\frac{A}{\varDelta}-H\right)P^2+\left(\frac{B}{\varDelta}-H\right)Q^2+\left(\frac{C}{\varDelta}-H\right)R^2+2\frac{D}{\varDelta}QR+2\frac{E}{\varDelta}RP+2\frac{F}{\varDelta}PQ.$$

Aequatio (23.) scribi potest

$$xP+yQ+zR = 1;$$

aut substitutis valoribus ipsorum x, y, z ex aequationibus (27.) derivatis,

$$30.\quad \frac{1}{\varDelta'}(A'P^2+B'Q^2+C'R^2+2D'QR+2E'RP+2F'PQ) = 1.$$

Quum aequationes (29.) et (30.) inter se congruere debeaut, habemus

$$\frac{A'}{\varDelta'} = \frac{A}{\varDelta}-H,\quad \frac{B'}{\varDelta'} = \frac{B}{\varDelta}-H,\quad \frac{C'}{\varDelta'} = \frac{C}{\varDelta}-H,\quad \frac{D'}{\varDelta'} = \frac{D}{\varDelta},\quad \frac{E'}{\varDelta'} = \frac{E}{\varDelta},\quad \frac{F'}{\varDelta'} = \frac{F}{\varDelta};$$

ergo coëfficientes superficierum confocalium (21.) et (22.) conditiones explent

$$31.\quad \begin{cases} \dfrac{A}{\varDelta}-\dfrac{A'}{\varDelta'} = \dfrac{B}{\varDelta}-\dfrac{B'}{\varDelta'} = \dfrac{C}{\varDelta}-\dfrac{C'}{\varDelta'}, \\ \dfrac{D}{\varDelta} = \dfrac{D'}{\varDelta'}, \\ \dfrac{E}{\varDelta} = \dfrac{E'}{\varDelta'}, \\ \dfrac{F}{\varDelta} = \dfrac{F'}{\varDelta}. \end{cases}$$

Berol. Jau. 1842.

12.

Ueber die Normalen der Ellipse und des Ellipsoïds.

(Von Hrn. Dr. *Joachimsthal* zu Berlin.)

1.

Die Aufgabe, von einem beliebigen Puncte in der Ebene einer Ellipse Normalen an dieselbe zu ziehen, läfst keine Lösung durch den Kreis und die gerade Linie zu, da sie von einer nicht reducirbaren Gleichung vierten Grades abhängt. Einige der Beziehungen zwischen den vier Normalen, welche von einem Puncte aus im Allgemeinen an die Curve möglich sind, sind in dem Folgendem enthalten.

Wir beweisen zuerst nachstehenden Hülfssatz:

Sind durch einen Hyperbelpunct b zwei Gerade den Asymptoten parallel und durch einen andern Hyperbelpunct a eine Transversale gezogen, welche die Hyperbel noch in c, jene Geraden in d und e schneidet, so bleibt das Verhältnifs $\frac{cd}{ce}$ unverändert, während die Transversale sich um a bewegt. (Taf. II. Fig. 4.)

Schneiden ab und ad die Asymptoten in β, β', γ, γ', so ist bekanntlich $\gamma' c = \gamma a$, $\beta' b = \beta a$ und man hat

$$\frac{\gamma' d}{\gamma' a} = \frac{\beta' b}{\beta' a} \quad \text{oder} \quad cd = \frac{\beta' b}{\beta' a}\gamma' a - \gamma' c = \frac{\beta' b}{\beta' a}\left(\gamma' a - \gamma' c \frac{\beta' a}{\beta' b}\right).$$

Ferner ist

$$\gamma' c \frac{\beta' a}{\beta' b} = \gamma' c + \gamma' c \frac{ba}{\beta' b} = \gamma' c + \frac{\gamma a}{\beta a} ba = \gamma' c + ae,$$

also

$$cd = \frac{\beta' b}{\beta' a}(\gamma' a - \gamma' c - ae) = \frac{\beta' b}{\beta' a} ce \qquad \text{oder} \qquad \frac{cd}{ce} = \frac{\beta' b}{\beta' a}.$$

Die rechte Seite der Gleichung hängt nur von den festen Puncten b und a ab, ist also unveränderlich, und hiermit ist der Satz erwiesen. Umgekehrt hat man den Satz:

Bewegt sich um den festen Punct a eine Transversale, welche zwei feste Gerade in d und e schneidet, und man bestimmt in jeder ihrer Lagen einen Punct c dergestalt auf ihr, dafs das Verhältnifs $\frac{cd}{ce}$ einen constanten Werth erhält, so ist der *Ort* von c eine Hyperbel, welche durch a und den Durchschnittspunct b der festen Geraden geht; ihre Asymptoten sind letzteren parallel.

Ist nun b ein Punct einer Ellipse (Fig. 5.), sind bu, bs die Tangente und die Normale an demselben, os, ot die Richtungen der grofsen und der kleinen Axe $2A$ und $2B$, und ou und bg auf der Tangente und der grofsen Axe senkrecht, so hat man

$$\frac{bs}{bg} = \frac{ov}{ou},$$

oder, da $bg.ov = B^2$ ist,

$$bs = \frac{B^2}{ou}$$

und, ähnlich,

$$bt = \frac{A^2}{ou},$$

also

$$\frac{bs}{bt} = \frac{B^2}{A^2}.$$

Bewegt man daher um einen Punct l eine Transversale, deren Durchschnitte mit den Haupt-Axen s und t sein mögen, und bestimmt auf ihr in jeder ihrer Lagen einen Punct b dergestalt, dafs $\frac{bs}{bt} = \frac{A^2}{B^2}$ ist, so wird die Transversale eine Normale der Ellipse, so oft b auf dem Umfange der Curve liegt. Nimmt man den vorhergehenden Satz zu Hülfe, so erhält man folgenden Satz:

> Die Puncte, nach welchen man von einem gegebenen Puncte l Normalen an eine Ellipse ziehen kann, liegen mit l und dem Mittelpuncte der Curve in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten den Axen der Ellipse parallel sind.

Analytisch folgt der Satz unmittelbar aus der Gleichung der Normale.

2.

Sind 2 Puncte a und b der Ellipse gegeben, so wird man zwei andere Ellipsenpuncte α, β finden können, deren Normalen mit denen von a und b sich in einem Puncte treffen. In der That ist dazu nur erforderlich, die Durchschnitte der Ellipse mit derjenigen gleichseitigen Hyperbel zu construiren, welche durch a, b und den Mittelpunct der Ellipse geht, und deren Asymptoten den Axen der Ellipse parallel sind; oder auch die zweite gemeinschaftliche Secante beider Curven; die erste ist ab. Diese Aufgabe ist ein specieller Fall der andern: „Wenn von zwei Kegelschnitten zwei Durchschnittspuncte und aufserdem von jedem irgend 3 Puncte gegeben sind, ihre übrigen Durchschnittspuncte zu finden," für welche eine aus dem *Pascal*schen Satze sich ergebende Lösung bekannt ist. (Vergl. *Steiner*, „geometrische Constructionen" pag. 102.) Wendet man dieselbe auf den vorliegenden Fall an, so würde die Construction etwa folgende sein:

Man bestimme den Ellipsenpunct B (Fig. 6.), b diametral gegenüber, ziehe von a eine Parallele mit einer Axe, welche die Ellipse in h treffen mag; die Gerade Bh treffe jene Axe in e, so ist e ein Punct der zweiten gemeinschaftlichen Secante; einen zweiten Punct f derselben Linie erhält man, wenn dieselbe Operation in Bezug auf die andere Axe gemacht wird. Ist A der a diametral gegenüberliegende Ellipsenpunct, so ist der Durchschnitt der beiden Perpendikel, welche man in e und f auf den Axen errichtet, der Pol der Sehne AB. Ist nämlich $e\varepsilon$ das eine dieser Perpendikel, welches BA in ε schneidet, und sind a', b' die Schnittpuncte der Axen mit AB, so sind b' und ε, A und B conjugirte harmonische Puncte; denn die Gerade Ae (welche in der Figur nicht gezogen ist) bildet mit Be einen Winkel, der von $e\varepsilon$ und eb' halbirt wird, $e\varepsilon$ ist daher die Polare von b', und ebenso würde das durch f gehende Perpendikel die Polare von a' sein. Der Pol von AB ist demnach der Durchschnitt beider Lothe; und analog ist der Pol von ef derjenige Punct, in welchem die beiden in a' und b' auf den Axen errichteten Lothe sich schneiden.

3.

Diese Betrachtungen geben unmittelbar folgende Sätze: (Fig. 7.)

I. Es seien a und b zwei Ellipsenpuncte; der Mittelpunct der Curve sei o; c der Durchschnitt der Tangenten an a und b, oder der Pol von ab; c' liege c diametral gegenüber, so dafs $oc' = oc$ ist. Fället man von c' Perpendikel auf die Haupt-Axen, so wird die Gerade durch ihre Fufspuncte den Kegelschnitt in zwei solchen Puncten α, β treffen, dafs die Normalen von a, b, α, β in einem Puncte sich schneiden.

II. Es schneide die Sehne ab die Axen in a', b', und es seien $a'\gamma$, $b'\gamma$ auf ihnen senkrecht, γ' der dem Puncte γ diametral gegenüberliegende Punct. Legt man von γ' Tangenten an die Ellipse, so werden die Berührungspuncte α, β die Eigenschaft haben, dafs die Normalen von a, b, α, β in einem Puncte sich schneiden.

Der Durchmesser, welcher $\alpha\beta$ parallel ist, ist demjenigen gleich, auf dessen Verlängerung c und c' liegen; denn sie schliefsen gleiche Winkel mit den Axen ein. Liegt β' dem Puncte β diametral gegenüber, so ist die Richtung $\alpha\beta'$ der Richtung $\alpha\beta$ conjugirt, und wenn man erwägt, dafs der zuletzt erwähnte Durchmesser der Sehne ab conjugirt ist, so folgt aus dem Vorhergehenden, dafs die Sehnen ab und $\alpha\beta'$ gleiche Winkel mit

den Axen bilden. Nach einem bekannten Satze liegen aber dann die vier Puncte in einem Kreise; also hat man Folgendes:

III. Sind a, b, α, β vier Ellipsenpuncte, an welche man von einem Puncte l aus Normalen ziehen kann, so liegen je drei von ihnen, z. B. a, b, α mit dem Ellipsenpuncte β', der β diametral gegenüber liegt, in einem Kreise.

Läfst man in (I.) a und b zusammen fallen, so erhält man folgenden speciellen Satz:

IV. Es seien α und α' diametral gegenüberliegende Ellipsenpuncte. Fället man von α' Perpendikel auf die Haupt-Axen, so wird die Gerade durch ihre Fufspuncte den Kegelschnitt in zwei Puncten α und β treffen, deren Normalen durch den zu c gehörigen Krümmungsmittelpunct gehen. (Fig. 8.)

Ferner erhält man folgende Construction für die allgemeinste Aufgabe, auf welche noch der Kreis angewendet werden kann:

V. Es sei lb eine Normale eines Kegelschnittes am Puncte b desselben: man will von l noch alle übrigen möglichen Normalen an den Kegelschnitt ziehen. Zu diesem Ende errichte man Perpendikel auf die Axen, wo diese von der Normale lb geschnitten werden; ihr Durchschnitt sei p; π und β seien die den Puncten p und b diametral gegenüberliegenden Puncte, und u die Mitte zwischen π und l. Ein Kreis, dessen Mittelpunct u ist, und welcher durch β geht, wird die Ellipse in noch 3 Puncten schneiden, deren Normalen in l sich treffen. (Fig. 9.)

4.

Wie viele reelle Normalen von irgend einem Puncte aus an die Ellipse gezogen werden können, oder, was dasselbe ist, wie viele von den Durchschnitten der obigen Hyperbel mit der Ellipse reell bleiben, hat *Legendre* analytisch auf höchst elegante Weise angegeben (*Traité des Fonct. ellipt. T. I. p. 348*). Doch mufs schon *Apollonius* im fünften Buche seiner Kegelschnitte ähnliche Untersuchungen angestellt haben, wie aus der Inhalts-Angabe zu ersehen, die *Chasles* in seiner Geschichte der neuern Geometrie von diesem Werke giebt. Vermittels der Sätze II. und IV. läfst sich die Frage sehr anschaulich erledigen, indem man den Weg verfolgt, den der Durchschnittspunct einer beweglichen Normale mit einer festen auf dieser nimmt. Es bedarf dazu folgender einfacher Hülfsbetrachtung.

Ist eine Curve C von einer Geraden G umhüllt, die sich stetig und in demselben Drehungssinne bewegt hatte, so wird der Durchschnitt D die-

ser beweglichen Tangente G mit einer festen Geraden G' auf dieser continuirlich fortrücken; mit der einzigen Ausnahme (welche in der neuern Geometrie kaum mehr als solche gilt), dafs G der Geraden G' parallel geworden ist. D geht in diesem Falle von der einen Seite durch den unendlich entfernten Punct nach der andern Seite von G'. Es ist aber nicht nöthig, dafs die Richtung von D beständig dieselbe sei. Denn wird die Curve C von G' in P geschnitten, so wird D nach P gelangen, und dann einen Theil der durchlaufenen Strecke zurückwandern. Nur wenn C von G' berührt wird, bleibt auch die Stetigkeit der Richtung; was nicht als Ausnahme zu betrachten ist; denn G' ist durch zwei unendlich nahe Puncte gegangen, und D hat dadurch eine zweimalige Aenderung seiner Richtung erfahren. Umgekehrt: findet eine Richtungsänderung für D statt, so kann dies nur in einem Puncte von C selbst sein. Für die Curve C sind nach den oben angegebenen Bedingungen auch Spitzen erster Art nicht ausgeschlossen, wo die beiden Zweige der Curve eine gemeinschaftliche Tangente haben, welche zwischen ihnen liegt. Die Evolute der Ellipse ist nach Art der Curve C entstanden. Will man also den Weg verfolgen, den der Durchschnitt einer beweglichen Normale mit einer festen am Puncte a durchläuft, so ist zu untersuchen, ob und wo diese letztere die Evolute schneide, oder welche Krümmungsmittelpuncte, aufser dem zu A selbst gehörigen, auf ihr liegen. Soll dies stattfinden, so mufs der Punct, welchen wir in Satz II. durch γ bezeichnet haben, in die Peripherie der Ellipse fallen. Dies ist, wie eine einfache Betrachtung lehrt, unmöglich, so lange b in demselben Ellipsenquadranten liegt wie a, oder in den beiden nebenan liegenden (Fig. 8.). Entfernt sich b von dem Axen-Endpuncte o nach u hin, so mufs es eine Lage p von b geben, für welche γ in die Peripherie der Ellipse nach μ fällt. In der That tritt γ in die Ellipse hinein, und kommt sogar nach dem Mittelpunct der Ellipse, wenn b nach a', a diametral gegenüber, gekommen ist. Zwischen a' und u giebt es wieder eine Lage q, für welche jener Punct γ in die Peripherie nach λ fällt; von da tritt er wieder aus der Ellipse heraus. Man überzeugt sich leicht, dafs dies zwischen p und q nicht schon geschehen sein kann. Liegen die Puncte m und l den Puncten μ und λ diametral gegenüber, so befinden sich die zu ihnen gehörigen Krümmungsmittelpuncte auf der Normale von a; wir wollen sie mit M und L bezeichnen und den zu a gehörigen Krümmungsmittelpunct mit A. Construiren wir nach (IV.) aufserdem die Puncte α und β, deren

Normalen durch A gehen, so können wir deutlich übersehen, welche Lage der Durchschnitt D jener Normalen am beweglichen Puncte b mit der festen Normale in a hat. Bewegt sich nemlich

b von a nach l,	so bewegt sich D von A nach L,
- - - l - - β,	- - - - - - - - - L - - A,
- - - β - - p,	- - - - - - - - - A - - M,
- - - p durch a' nach q,	- - - - - - - - - M durch d. unendl. entf. P. nach L,
- - - q nach α,	- - - - - - - - - L nach A,
- - - α - - m,	- - - - - - - - - A - - M,
- - - m - - a,	- - - - - - - - - M - - A.

Der Punct β kann nicht zwischen a und l liegen, denn sonst fände zwischen a und β noch eine Richtungs-Aenderung für D statt, oder es läge zwischen a und β ein neuer Punct, dessen Krümmungscentrum auf der Normale im Puncte a sich befände; was unmöglich ist. Es ergiebt sich auch, dafs A zwischen L und M liegen mufs. Fassen wir das Obige zusammen, so sehen wir, dafs die Normale am Puncte a in L, A und M von zwei andern Normalen, sonst aber zwischen L und M von drei, und auf der aufserhalb LAM liegenden Strecke nur von einer andern Normale getroffen wird. Da die Evolute eine geschlossene Curve ist, so liegt also das Stück LAM innerhalb derselben. Erwägt man noch aufserdem, dafs von irgend einem beliebigen Puncte immer doch zwei Normalen möglich sein müssen, (da es nothwendigerweise eine kürzeste und eine längste Entfernung des Punctes von der Ellipse giebt, welche bekanntlich immer senkrecht auf der Curve stehen), so kann man das vorhin erhaltene Resultat wie folgt aussprechen:

„Liegt ein Punct innerhalb der Evolute, so gehen durch ihn vier Normalen „der Ellipse: liegt er auf der Evolute selbst, drei: liegt er aufserhalb, zwei."

Dies ist das von *Legendre* gegebene Resultat.

5.

Einige metrische Relationen haben vielleicht noch Interesse, weil sie eine Ausdehnung des bekannten Ausdrucks für den Krümmungsradius sind.

Es seien n, n' die Stücke zweier Normalen einer Ellipse, von den Puncten a, b der Curve bis zu ihrem Durchschnitte l; p, p' seien die Abstände der Tangenten an a und b vom Mittelpuncte und $2d$ der Durchmesser, welcher der Sehne ab parallel ist, so hat man

$$pn + p'n' = 2d^2.$$

Denn bezeichnet man ca und cb (Fig. 5.) mit t, t', co mit z, do mit x, $ad = db$ mit y, so würde man, wenn cl gezogen würde,

$$cl = \frac{ab}{\sin acb} = \frac{2y}{\sin acb}$$

haben, und demnach, zufolge des Ptolemäischen Lehrsatzes:

$$t'n + t'n = \frac{4y^2}{\sin acb}.$$

Drückt man das Dreieck acb auf zwei verschiedene Arten aus, so erhält man

$$tt' \sin acb = 2y(z-x)\sin adc.$$

Dadurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$\frac{n}{t} + \frac{n'}{t'} = \frac{2y}{\sin adc(z-x)}.$$

Es ist aber

$$tp = z.y \sin adc, \qquad t'p' = z.y \sin adc;$$

substituirt man diese Werthe von t und t', so erhält man

$$np + n'p' = 2y^2 \frac{z}{z-x}.$$

Nach bekannten Sätzen ist aber $\frac{z}{z-x} = \frac{d^2}{y^2}$, also

$$np + n'p' = 2d^2.$$

Läfst man a und b zusammenfallen, so wird n der Krümmungsradius, und $n' = n$, $p = p'$, also

$$n = \frac{d^2}{p};$$

wo d den Halbmesser bedeutet, welcher der Tangente an a parallel ist.

Da die Sehnen ab und $\alpha\beta$ Durchmessern parallel sind, welche die Gröfse zweier zusammengehöriger conjugirter Durchmesser haben, so erhält man folgenden Satz:

„Schneiden sich die Normalen der vier Puncte a, b, α, β einer Ellipse „im Puncte l, und bezeichnet man die Abstände der Tangenten an „diesen Puncten vom Mittelpuncte durch p, p', p'', p''', die Normal- „längen la, lb, $l\alpha$, $l\beta$ durch n, n', n'', n''', so ist

$$np + n'p' + n''p'' + n'''p''' = 2(A^2 + B^2),$$

„wo A und B die Halb-Axen der Curve bedeuten.

Alle diese Sätze gelten fast gleichmäfsig für die Hyperbel; für die Parabel sind wesentliche Aenderungen nöthig.

6.

Die Behandlung der Normalen auf dem Ellipsoide ist weniger einfach, weil sich die Normalen in zwei beliebigen Puncten f und g im All-

gemeinen nicht schneiden. Soll dies stattfinden, so mufs der Durchschnitt der Tangential-Ebenen von f und g mit der Sehne fg im Raume rechte Winkel bilden; was die einfachste stereometrische Betrachtung lehrt; oder mit andern Worten:

> Soll eine Gerade eine Fläche zweiten Grades in zwei solchen Puncten schneiden, dafs deren Normalen im Raume sich treffen, so ist erforderlich und genügend, dafs sie mit ihrer Polare im Raume rechte Winkel bilde.

Dieser höchst einfache Satz erlaubt eine Menge Folgerungen, wenn man die Eigenschaften polarer Graden als bekannt voraussetzt. Da z. B. zwei polare Grade zweien conjugirten Durchmessern parallel sind, und wenn die eine die Fläche berührt, die andre es ebenfalls thut, so ergiebt sich zuerst der für alle krumme Flächen geltende Satz, dafs, wenn man von einem Puncte der Fläche a ausgeht, man nur in zwei Richtungen einen unendlich nahen Punct b findet, so dafs die Normalen von a und b sich treffen, und dafs diese Richtungen zu einander senkrecht sind. Für Flächen zweiten Grades insbesondere folgt, dafs diese beiden Richtungen (die sogenannten Haupttangenten) den Haupt-Axen des Durchmesserschnitts parallel sind, welcher parallel mit der Tangential-Ebene vom Puncte a gelegt ist. Dieser Satz ist von *Dupin.* Verfolgt man eine jener beiden Richtungen, so erhält man bekanntlich die Krümmungslinien.

In jedem Puncte eines Ellipsoïdes lassen sich nun vier Tangenten hervorheben: a und b die Haupttangenten und c und d die Kreisschnittstangenten, in deren Richtung (und aufserdem senkrecht auf die Ebene der gröfsten und kleinsten Axe der Fläche) man schneiden mufs, um die beiden Kreise zu erhalten, welche durch den gegebenen Punct gehen.

Zieht man zwei Durchmesser c' und d' mit den Kreistangenten c und d parallel, so werden diese untereinander und der mittleren Axe gleich sein; denn sie liegen in den beiden Kreisen, welche durch die mittlere Axe gehen. Sind die Durchmesser a' und b' mit den Haupttangenten parallel, so liegen a', b', c' und d' in einer Durchmesser-Ebene, und a', b' sind die Haupt-Axen der in ihr liegenden Ellipse; folglich müssen die gleichen Durchmesser c', d' mit ihnen gleiche Winkel einschliefsen, oder, auf die Tangenten übertragen:

> „Die Haupttangenten sind die Halbirungslinien der Winkel, welche die „Kreistangenten bilden."

Ich hielt diesen Satz für neu, fand aber später, dafs *Chasles* in einem Bande der von *Quetelet* herausgegebenen *Correspondence mathématique* ohne Beweis ihn mitgetheilt hat. Mit Hülfe desselben kann man einen andern Satz von Krümmungslinien beweisen, den ich in einer früheren Abhandlung aufgestellt und analytisch verificirt habe.

Man denke sich aufser dem Ellipsoïd irgendwo eine Kugel, so kann man bekanntlich jeder Ebene einen gröfsten Kreis und jeder unbegränzten Geraden zwei Puncte der Kugel entsprechen lassen, indem man parallele Gebilde durch den Mittelpunct der Kugel legt. Bewegt sich eine Tangential-Ebene eines Ellipsoïdes längs einer Krümmungslinie, so bildet sie eine abwickelbare Oberfläche, deren Kanten diejenigen Haupttangenten der Fläche sind, welche auf jener Krümmungslinie senkrecht stehen. Das entsprechende Gebilde auf der Kugel wird eine geschlossene Curve C sein, deren sphärische Tangenten jenen Tangential-Ebenen des Ellipsoïdes, deren einzelne Puncte den Kanten der abwickelbaren Oberfläche, oder, wie schon erwähnt, einem Systeme von Haupttangenten, entsprechen. Sämmtlichen Kreisschnitttangenten werden Puncte entsprechen, die in den beiden gröfsten Kreisen K, K' liegen, deren Ebenen den Richtungen der Kreisschnitte parallel sind. Tragen wir den vorhergehenden Lehrsatz auf die Curve C über, so sehen wir, sie hat die Eigenschaft, dafs, wenn man in einem ihrer Puncte o die sphärische Tangente zieht, welche zwei feste Kreise K, K' in k und k' schneidet, die beiden Bogen ko und $k'o$ gleich sind. Die Curve C ist demnach ein sphärischer Kegelschnitt, dessen Asymptoten die Kreise K und K' sind. (Vergl. *Steiner* „über die Verwandlung sphärischer Figuren," gegenwärtiges Journ. Bd. 2. pag. 59.) Es bleibt also auch das sphärische Dreieck zwischen K, K' und einer beliebigen Tangente von C von constantem Inhalte, und da dieses von der Summe der Winkel abhängt, deren einer zwischen K und K' constant ist, so mufs es auch die Summe der beiden andern sein. Ueberträgt man dies auf das Ellipsoïd, und erwägt, dafs, wenn man statt des einen Winkels den Nebenwinkel nimmt, für die Summe die Differenz gesetz werden mufs, so erhält man folgenden Satz:

„Wenn sich eine Tangential-Ebene eines Ellipsoïdes so bewegt, dafs „der Berührungspunct eine Krümmungslinie beschreibt, so bleibt die „Summe oder Differenz der Winkel, welche sie mit den Richtungen „der Kreisschnitte bildet, unverändert."

Berlin im Juni 1843.

13.

Ein Vieleck mit gegebenen Seiten ist am gröfsten, wenn seine Ecken in einem Kreise liegen.

(Von Hrn. Dr. *Fasbender* zu Iserlohn.)

Dieser Satz, welcher im 2ten Hefte des 25ten Bandes No. 14. für *Fünfecke* dargethan worden ist, läfst sich für *Vielecke* überhaupt wie folgt beweisen:

Sind die 4 Seiten a, b, c und d eines Vierecks $ABCD$ (Taf. I. Fig. 2.) gegeben, so ist dessen Inhalt eine Function nur eines seiner Winkel φ. Mit diesem ist der gegenüberliegende Winkel χ durch die Gleichung

$$1.\quad a^2+b^2-2ab\cos\varphi = c^2+d^2-2cd\cos\chi$$

verbunden. Als Ausdruck des Inhalts hat man

$$\tfrac{1}{2}ab\sin\varphi+\tfrac{1}{2}cd\sin\chi,$$

und hieraus die Bedingung für dessen Maximum oder Minimum:

$$\tfrac{1}{2}ab\cos\varphi\, d\varphi+\tfrac{1}{2}cd\cos\chi\, d\chi = 0,$$

oder

$$ab\cos\varphi\, d\varphi = -cd\cos\chi\, d\chi.$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit der Differentialgleichung von (1.)

$$2.\quad ab\sin\varphi\, d\varphi = cd\sin\chi\, d\chi$$

ergiebt sich

$$\tang\varphi = -\tang\chi.$$

Da jeder Winkel eines Vierecks gröfser als 0 ist, auch zwei Winkel eines Vierecks zusammen stets weniger als 2π betragen, so sind für den Winkel χ der Werth $-\varphi$ und alle kleineren, so wie der Werth $2\pi-\varphi$ und alle gröfseren, ausgeschlossen. Man hat also

$$\chi = \pi-\varphi,$$

welche Gleichung das Viereck als ein in den Kreis beschriebenes bezeichnet.

Der Ausdruck des Inhalts hat zum zweiten Differential-Coëfficienten nach φ:

$$-\tfrac{1}{2}ab\sin\varphi - \tfrac{1}{2}cd\sin\chi\left(\frac{d\chi}{d\varphi}\right)^2 + \tfrac{1}{2}cd\cos\chi\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}.$$

Dieser verwandelt sich durch Hülfe der Gleichung (2.) und deren Differentialgleichung

$$ab\cos\varphi\,.\,d\varphi^2 = cd\sin\chi\,.\,d^2\chi + cd\cos\chi\,.\,d\chi^2$$

in

$$\frac{abcd\sin^2\chi\,.\cos(\varphi+\chi) - a^2b^2\sin^2\varphi}{2cd\sin^3\chi};$$

er ist also, da $\cos(\varphi+\chi) = -1$ ist, negativ, und es findet ein *Maximum* statt.

Hieraus folgt der Satz für Vielecke überhaupt. Ist das Vieleck *ABCDEF*.... (Taf. I. Fig. 3.) ein Maximum, so müssen zunächst die vier Ecken *A, B, C* und *D* in einem Kreise liegen; im entgegengesetzten Falle liefse sich ein Viereck *AB'C'D* zeichnen, dessen Inhalt gröfser wäre als *ABCD*, und das Vieleck *AB'C'DEF*.... wäre gröfser als *ABCDEF*.... Aus demselben Grunde liegen die 4 Ecken *B, C, D* und *E* in einem Kreise; dieser ist derselbe, wie der vorige, da beide durch die drei Puncte *B, C* und *D* gehen. Ebenso liegen die vier Puncte *C, D, E* und *F* in einem Kreise, und zwar in demselben, in welchem die vier Puncte *B, C, D* und *E* liegen. Auf diese Weise ergiebt sich, dafs auch alle übrigen Ecken des Vielecks auf diesem Kreise liegen.

Die Reihenfolge der Seiten des Vielecks ist beliebig. Man kann dasselbe aus dem Mittelpuncte des umschriebenen Kreises durch die Radien der Ecken in gleichschenklige Dreiecke zerschneiden und diese an ihren Spitzen in beliebiger Ordnung wieder zusammen legen.

Iserlohn im April 1843.

14.

Durch vier gegebene Puncte eine Parabel zu ziehen.

(Von Hrn. Prof. *Umpfenbach* zu Gieſsen.)

Da mir die folgende Auflösung der vorstehenden Aufgabe noch nicht vorgekommen ist, so führe ich dieselbe hier an.

Die allgemeine Gleichung aller Kegelschnitte ist bekanntlich von der Gestalt

$$y^2 + \alpha xy + \beta x^2 + \gamma y + \delta x + \eta = 0.$$

Wählen wir die Axen so, dafs die eine derselben durch zwei, die andere durch die zwei andere der gegebenen Puncte geht. Es seien demnach die Coordinaten dieser vier Puncte y', 0; y'', 0; 0, x'; 0, x'', so ergeben sich durch die successive Substitution dieser Werthe an die Stelle von x und y in die vorige Gleichung die vier Gleichungen

$$y'^2 + \gamma y' + \eta = 0,$$
$$y''^2 + \gamma y'' + \eta = 0,$$
$$\beta x'^2 + \delta x' + \eta = 0,$$
$$\beta x''^2 + \delta x'' + \eta = 0.$$

Aus der Verbindung der beiden ersten Gleichungen ergiebt sich leicht $\gamma = -(y' + y'')$, $\eta = y'y''$. Setzen wir diesen Werth in die letzten Gleichungen, so folgt $\beta = \frac{y'y''}{x'x''}$, $\delta = -\frac{y'y''(x'+x'')}{x'x''}$. Da nun die obige Gleichung einer Parabel angehören soll, so ist $\alpha^2 = 4\beta$; daher $\alpha = \pm 2\sqrt{\left(\frac{y'y''}{x'x''}\right)}$. Damit dieser Werth reell sei, müssen y', y'', x', x'' paarweise dasselbe Zeichen haben. Wir finden zwei Werthe, weil man durch die vier gegebenen Puncte zwei Parabeln führen kann.

Betrachten wir wieder die ursprüngliche Gleichung. Der Durchmesser der Curve, welcher die Sehnen parallel mit der Axe Y halbirt, hat zur Gleichung $y = -\frac{1}{2}(\alpha x + \gamma)$; der Coëfficient dieser Gleichung ist $-\frac{1}{2}\alpha = \mp\sqrt{\left(\frac{y'y''}{x'x''}\right)}$.

Der Durchmesser der Curve, welcher die Sehnen parallel mit der Axe X halbirt, hat zur Gleichung $x = -\frac{(\alpha y + \delta)}{2\beta}$, oder, was dasselbe ist, $y = -\frac{2\beta}{\alpha} . x - \frac{\delta}{\alpha}$; der Coëfficient dieser Gleichung ist

$$-\frac{2\beta}{\alpha} = -\frac{2y'y''}{x'x''} : \pm 2\sqrt{\left(\frac{y'y''}{x'x''}\right)} = \mp\sqrt{\left(\frac{y'y''}{x'x''}\right)}.$$

Diese beiden Durchmesser sind also mit einander parallel; wie es auch sein mufs, weil jeder Durchmesser einer Parabel mit deren Axe parallel ist.

Es sei nun $m = -\sqrt{\left(\frac{y'y''}{x'x''}\right)}$, $m' = +\sqrt{\left(\frac{y'y''}{x'x''}\right)}$. Construiren wir die geraden Linien, deren Gleichungen $y = mx$ und $y = m'x$ sind, welches leicht geometrisch vollzogen werden kann, so haben wir zwei gerade Linien, welche den Axen dieser beiden Parabeln parallel sind. In Beziehung auf den Ursprung und die gerade Linie, deren Gleichung $y = mx$ ist, führen wir die senkrechten Coordinaten b, a; b', a'; b'', a''; b''', a''' der vier gegebenen Puncte; es seien die Coordinaten des Scheitels der Parabel v und u und $2p$ deren Parameter, so ergeben sich zwischen den drei zu bestimmenden Gröfsen $2p$, v und u die vier Gleichungen

$$(b-v)^2 = 2p(a-u); \quad (b'-v)^2 = 2p(a'-u);$$
$$(b''-v)^2 = 2p(a''-u); \quad (b'''-v)^2 = 2p(a'''-u).$$

Aus den drei ersten dieser Gleichungen ergeben sich die drei gesuchten Werthe; die vierte Gleichung dient weiter zur Bewährung der gefundenen Resultate.

Dieselbe Construction machen wir in Beziehung der andern geraden Linie, deren Gleichung $y = m'x$ ist, um die andere Parabel zu bestimmen.

Rein geometrisch kann man verfahren, nachdem die zwei geraden Linien bestimmt sind, parallel mit den Axen der beiden Parabeln, indem man zwei der gegebenen Puncte vereinigt und durch die Mitte dieser Sehne mit einer Axe eine Parallele führt, welche dann der zu dieser Sehne gehörige Durchmesser sein wird. Die Aufgabe ist dann auf folgende einfachere zurückgebracht. Man kennt einen Durchmesser einer Parabel, zwei Puncte derselben und die Richtungen der zugehörigen Coordinaten: es ist die Parabel zu zeichnen.

Journal d. Math. Bd. XXVIII Hft 2.

Facsimile einer Handschrift von Nicolaus Bernoulli.

Celeberrimo Viro
Leonhardo Eulero
S. P. D
Nicolaus Bernoulli.

mihi gratiam facias responsionis justae, quam debeo litteris Tuis
novissimis jam ante 4 menses ad me datis, et quod Te enixe oro. Ita
m variis districtus sum negotiis, ut parum operae dare possim profundis
ditationibus aut laboriosissimis investigationibus, quales requirere
entur materiae ab acri Tuo ingenio proponi solitae. Bona igitur Tua
n venia paucissimis me nunc expediam.
ror me Tibi non intelligi in re tenuicula, quae Tibi ignota non est; mihi
n persuadere non possum Te statuere, seriem divergentem, cui licet in infi-
um continuatae semper aliquid deest, dare exacte valorem quantitatis
eriem resolutae. quemadmodum ex. gr. $\frac{1}{1-x}$ non est $= 1+x+xx+x^3 \ldots + x^\infty$
$= 1+x+xx+x^3 \ldots + x^\infty + \frac{x^{\infty+1}}{1-x}$, ita quoque sinus arcus elliptici s non
$= s - \frac{s^3}{6c^4} + \&c.$ sed $= s - \frac{s^3}{6c^4} + \&c. +$ vel $-$ functione aliqua infinite gradus arcus s.
mvis igitur iste sinus, ut in circulo, fortasse etiam sit $= s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\&c.$
tamen series $s - \frac{s^3}{6c^4} + \&c.$ eidem producto aequalis erit, in qua conclusione
ambo convenimus. etc:

Dat. Basileae d. 6. Apr. 1743.

15.

Ueber einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen.

(Von Hrn. Dr. *E. Heine* zu Berlin.)

Die Aufgabe, den Zustand des Gleichgewichtes der Wärme in einem Ellipsoïd, welches an der Oberfläche in einer willkürlich gegebenen, von der Zeit unabhängigen Temperatur erhalten wird, für einen beliebigen Punct desselben anzugeben, ist bekanntlich von *Lamé* auf eine höchst scharfsinnige Art gelöset worden, und dadurch ein bedeutender Fortschritt, nicht allein in der Theorie der Wärme, sondern auch in der der Anziehung gemacht *). Stellt man sich nämlich den unendlichen Raum mit Masse erfüllt vor, und daraus ein Ellipsoïd geschnitten, so besteht die von *Lamé* behandelte Aufgabe in nichts Anderem, als: das Potential des unendlichen Körpers, oder seiner mit Masse belegten Oberfläche, für alle Puncte des innern hohlen Raumes anzugeben, wenn es für die der Oberfläche bekannt ist. Dieser Aufgabe, in ihrer doppelten Gestalt, entspricht ein zweifacher Ausspruch einer andern, die wir im Gegensatz zu der eben angeführten des *innern Punctes*, die des *äufsern Punctes* nennen wollen, nemlich: man soll, wenn das Potential eines mit Masse erfüllten Ellipsoïdes, oder seiner mit Masse belegten Oberfläche, für alle Puncte dieser Oberfläche gegeben ist, dasselbe für einen beliebigen äufsern Punct angeben. Aufserdem gehört hierher noch eine dritte Aufgabe über ein durch zwei Ellipsoïden mit gleichen Brennpuncten gebildetes Körperstück.

Die erste der beiden oben erwähnten *Lamé*schen Abhandlungen scheint einer Erweiterung, in der Art, dafs sie sämmtliche drei Aufgaben umfafst, nicht fähig zu sein, während die zweite, welche die Rotations-Ellipsoïden behandelt, eine solche Verallgemeinerung gestattet. Dadurch nämlich, dafs bei den Körpern dieser Art die Entwicklungen eine einfachere Gestalt annehmen, als in dem allgemeineren Falle, wird es möglich, zwei

---

*) Journal de mathématiques par *J. Liouville*, Tome IV, 1839. pag. 126—163 und 351—385.

verschiedene, d. h. nicht in constantem Verhältnifs zu einander stehende Auflösungen der Differentialgleichung ersten Grades zweiter Ordnung zu finden, welche angiebt, wie ein gewisser Radiusvector als veränderliche Gröfse in den zu untersuchenden Wärmezustand, oder in den Ausdruck des Potentials eingeht. Bei der ersten Aufgabe ist das eine auch von *Lamé* angewandte particuläre Integral zu benutzen, bei der zweiten das andere; bei der dritten sind sie beide gehörig zu verbinden. Einfacher werden aber die Entwicklungen bei der Frage über die Rotations-Ellipsoïden, als bei der allgemeinen, indem man damit ausreicht, wenn man statt des Ellipsoïdes und der zwei Hyperboloïden, welche mit dem gegebenen gleiche Brennpuncte haben, deren Durchschnitt bei dieser jeden Punct bestimmt, bei jener mit einem Rotations-Ellipsoïd, einem Rotationshyperboloïd und einem der Länge entsprechenden Winkel ausreicht; die beiden Umdrehungskörper sind hinsichtlich ihrer grofsen Achsen veränderlich, ihre Brennpuncte aber fallen mit denen des gegebenen Ellipsoïdes zusammen. Noch einfacher gestaltet sich Alles, wenn man ein Rotations-Ellipsoïd mit denselben Brennpuncten, welche das gegebene hat, aber veränderlicher grofser Achse, und zwei veränderliche Winkel einführt, von denen der eine der Länge auf der Erde, der andere der Breite entspricht. Dadurch dafs man jeden Punct vermittelst dieser Polarcoordinaten festlegt, gelingt es, indem man die bekannten, auch von *Lamé* gebrauchten Sätze *unmittelbar* anwenden kann, die drei Aufgaben für abgeplattete und verlängerte Rotations-Ellipsoïden zugleich durch Betrachtungen zu lösen, die fast die Einfachheit der bei denselben Untersuchungen für die Kugel angewandten erreichen. Die Entwicklung der hier angedeuteten Methode findet sich im Folgenden. Von den drei zu lösenden Aufgaben habe ich die erste und die dritte als der Wärmetheorie angehörig behandelt, da sie, so aufgefafst, ein gröfseres Interesse darbieten, als wenn man auch sie, wie es bei der zweiten geschehen ist, auf das Gebiet der Theorie der Anziehung überträgt.

§. 1.

Indem wir uns zu der Behandlung der Aufgaben wenden, bemerken wir, dafs die drei Fälle bis zu einem gewissen Puncte dieselben Formeln liefern; weshalb wir sie bis dahin gemeinsam führen könnten; jedoch ist es wegen der Kürze und Bestimmtheit im Ausdruck vorzuziehen, die dritte Aufgabe noch unberücksichtigt zu lassen. In §. 3., wo dieselbe aufgelöst wird, läfst sich das dazu Nöthige leicht nachholen. Man sieht leicht, dafs

die Trennung erst da nothwendig sein wird, wo die Bedingungen für die Oberfläche in Betracht kommen. Solche Bedingungen sind eben das Characteristische für die verschiedenen Körper, indem immer, wenn nach dem Gleichgewicht der Temperatur oder nach dem Potential gefragt wird, die Integration derselben Differentialgleichung

$$1. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

gefordert wird. Ist die Gleichung gehörig integrirt, so giebt die abhängige Veränderliche u für den Punct, dessen Coordinaten x, y, z sind, den verlangten Wärmezustand oder das Potential an. Die Bedingung, so wie sie gegeben ist, erscheint in so complicirter Gestalt, dafs sie sich nach dem jetzigen Standpunct der Analysis nicht unmittelbar mit der Differentialgleichung verbinden läfst; denn es wird verlangt, dafs ein Werth u gefunden werde, der nicht nur, in (1.) gesetzt, die linke Seite gleich 0 macht, sondern auch, wenn x, y, z durch die Gleichung

$$2. \quad \frac{x^2+y^2}{r_0^2}+\frac{z^2}{r_0^2-e^2}=1$$

verbunden sind, in eine willkürlich gegebene Function von x, y, z übergeht. In (2.) bezeichnet nämlich r_0 die Gröfse jeder der beiden gleichen Achsen des gegebenen Ellipsoïdes, e seine Excentricität, sie mag reell oder imaginär sein, d. h. das Ellipsoïd sei ein (an den Polen) *abgeplattetes*, oder ein *verlängertes*.

Wie schon in der Einleitung angedeutet, stellen wir uns, und zwar um die eben ausgesprochene Bedingung vereinfachen zu können, den ganzen Raum mit Ellipsoïden erfüllt vor, die mit dem gegebenen gleiche Brennpuncte haben. Bezeichnet man die Hälfte der Länge der einen von den beiden gleichen Achsen irgend eines von ihnen mit r, so ist die Gleichung der Oberfläche desselben:

$$2.^* \quad \frac{x^2+y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2-e^2}=1.$$

Für den gegebenen Körper ist $r=r_0$ zu setzen. Offenbar läfst sich die Gleichung (2.*) durch folgende drei andern ersetzen:

$$3. \quad x=r\sin\theta\cos\varphi, \quad y=r\sin\theta\sin\varphi, \quad z=\sqrt{(r^2-e^2)}\cos\theta,$$

wo bei der ersten Aufgabe r für ein reelles e zwischen e und r_0 liegt, für ein imaginäres zwischen 0 und r_0; bei der zweiten zwischen r_0 und ∞, θ zwischen 0 und π; φ zwischen 0 und 2π. In allen Fällen reicht man

aus, wenn man r positive Werthe giebt. Die Aufgabe besteht nun darin, die Gleichung (1.), in welcher x, y, z durch (3.) verbunden sind, so zu integriren, dafs u für $r = r_0$ in eine gegebene endliche Function von θ und φ übergeht, z. B. in $f(\theta, \varphi)$. Eliminirt man aus (1.) durch (3.) die Werthe x, y, z auf die gewöhnliche Art, so hat man als zu integrirende Differentialgleichung:

$$4. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.(r^2-e^2)+\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{(2r^2-e^2)}{r}+\frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{e^2}{r^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

und als Bedingung: $u = f(\theta, \varphi)$ für $r = r_0$.

Wird $e = 0$, so gehen r, θ, φ in die gewöhnlichen Coordinaten für die Kugel über; es verschwindet der in e multiplicirte Theil aus (4.) und man erhält

$$r\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}=0;$$

d. h. die Differentialgleichung, welche bei der Kugel (4.) entspricht. Ueberhaupt werden auch die folgenden Formeln sich leicht auf eine endliche Gestalt bringen lassen, wenn $e = 0$ ist.

§. 2.

Die Herleitung der Formel (1.), so wie die von (4.), setzt voraus, dafs sowohl u, als auch die ersten beiden Differentialquotienten von u, für die hierher gehörigen Werthe von x, y, z oder r, θ, φ, continuirlich bleiben. Es läfst sich also nach bekannten Sätzen u, insofern es eine Function der beiden Veränderlichen θ und φ ist, in eine Reihe von der Form $u = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$ entwickeln, wo X_n eine rationale ganze Function $n$ten Grades von $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$ und $\sin\theta\sin\varphi$ bedeutet, die die Differentialgleichung

$$5. \quad \frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial X_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)X_n=0$$

erfüllt *). Dafs eine solche Entwicklung nur auf eine Art geschehen kann, ist gleichfalls bewiesen. Man kann sogar die einzelnen X_n in eine Summe von Producten zerlegen, von denen jedes aus drei Factoren besteht, nämlich erst-

*) Der ganze Beweis für die Möglichkeit einer solchen Entwicklung findet sich im gegenw. Journal f. d. Math. Bd. XVII., in: *Lejeune Dirichlet*, „sur les séries dont le terme général dépend de deux angles etc."

lich einem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen des Winkels φ (dafs dieses Vielfache das $n$fache nicht übersteigen wird, ist klar, indem X_n natürlich auch eine rationale ganze Function $n$ten Grades von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ist); zweitens einer rationalen ganzen Function von $\sin\theta$ und $\cos\theta$, und endlich einer Constanten, d. h. einem von θ und φ unabhängigen Werth. In unserem Falle wird diese Constante einen Parameter, r nämlich, enthalten, also nicht absolut unveränderlich sein, indem wir u als Function von θ und φ entwickelt haben, dieses u aber, wie man schon voraussieht, im Allgemeinen mit r veränderlich sein wird. Es ist demnach die allgemeine Form von X_n:

$$6.\quad X_n = \sum_{m=0}^{m=n} (P_{n,m}(g_{n,m}\cos m\varphi + h_{n,m}\sin m\varphi)),$$

wo $g_{n,m}$ und $h_{n,m}$ die beschriebenen Constanten bezeichnen, $P_{n,m}$ aber die Function von $\sin\theta$ und $\cos\theta$ vorstellt. Letztere läfst sich in folgender geschlossenen Reihe darstellen:

$$6.^*\quad P_{n,m} = \sin^m\theta\Big(\cos^{n-m}\theta - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2.(2n-1)}\cos^{n-m-2}\theta + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-m-4}\theta - \ldots\Big)\text{*)}.$$

Setzt man zunächst $u = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$ in (4.) und ferner für das Differential der Summe der X_n die Summe der Differentiale dieser Function, so hat man:

$$7.\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{\partial^2 X_n}{\partial r^2}.(r^2-e^2) + \frac{\partial X_n}{\partial r}.\frac{(2r^2-e^2)}{r} + \frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial X_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} - \frac{e^2}{r^2}.\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}\right) = 0.$$

Die Summe des dritten und vierten Gliedes in dem unter dem Σ befindlichen Ausdruck ist nach (5.) gleich $-n(n+1)X_n$ zu setzen. Macht man ihn dann für den Augenblick $= Y_n$, so wird Y_n zur Classe der X_n gehören, d. h. in (5.) für X_n gesetzt, die linke Seite gleich Null machen. In der That gehören sowohl $-n(n+1)X_n$, als $\frac{\partial X_n}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 X_n}{\partial r^2}$ und $\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}$ zur Classe der X_n. Die Behauptung wegen der Differentiale von X_n wird sogleich gerechtfertigt, wenn man (5.) einmal nach r oder resp. zweimal nach r, oder endlich zweimal nach φ differentiirt. Erwägt man, dafs (r^2-e^2) und $\frac{(2r^2-e^2)}{r} - \frac{e^2}{r^2}$, unabhängig von θ und φ sind, so ist sogleich klar, dafs wirklich Y_n *zur Classe der* X_n *gehört.*

---

*) *Laplace*, Mécanique céleste. Tome II. page 42.

Soll nun $\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} Y_n = 0$ sein, so kann dieses wegen der so eben entwickelten Eigenschaft der Y_n nicht auf andere Art geschehen, als wenn jedes einzelne Glied gleich 0 ist. Man kann also das Summationszeichen der Gleichung (7.) weglassen und hat alsdann:

$$8. \quad \frac{\partial^2 X_n}{\partial r^2} \cdot (r^2 - e^2) + \frac{\partial X_n}{\partial r} \cdot \frac{(2r^2 - e^2)}{r} - n(n+1) X_n - \frac{e^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Aus (8.), verbunden mit (6.), wird sich ohne Mühe zeigen lassen, wie $g_{n,m}$ und $h_{r,m}$ von r abhängen, so dafs dann nur noch die rein numerischen Gröfsen zu bestimmen bleiben, die aus der Bedingung an der Oberfläche entstehen. Setzt man dazu in (8.) für X_n seinen Werth aus (6.), so wird:

$$\sum_{m=0}^{m=n} \Big[P_{n,m} \Big(\frac{\partial^2 g_{n,m}}{\partial r^2} (r^2 - e^2) + \frac{\partial g_{n,m}}{\partial r} \cdot \frac{2r^2 - e^2}{r} + g_{n,m} \Big(\frac{e^2 m^2}{r^2} - n(n+1) \Big) \Big) \cos m\varphi$$
$$+ P_{n,m} \Big(\frac{\partial^2 h_{n,m}}{\partial r^2} (r^2 - e^2) + \frac{\partial h_{n,m}}{dr} \cdot \frac{2r^2 - e^2}{r} + h_{n,m} \Big(\frac{e^2 m^2}{r^2} - n(n+1) \Big) \Big) \sin m\varphi \Big] = 0.$$

Soll nun eine nach Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Winkels φ fortschreitende Reihe für alle Werthe von φ verschwinden, so mufs bekanntlich der Factor jedes einzelnen Cosinus oder Sinus der Reihe gleich Null sein. Man kann demnach wiederum das Summationszeichen weglassen und das in $\cos m\varphi$ und das in $\sin m\varphi$ Multiplicirte einzeln gleich 0 setzen. Da ferner die vorstehende Gleichung für jedes θ bestehen mufs, und nur für besondere Werthe dieser unabhängigen Veränderlichen $P_{n,m} = 0$ sein kann, so ist es erlaubt, auch den Factor von $P_{n,m} \cos m\varphi$ und $P_{n,m} \sin m\varphi$ gleich 0 zu setzen. Macht man nun $\frac{r}{e} = \varrho$, so hat man die beiden Gleichungen

$$9. \quad \frac{\partial^2 g_{n,m}}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho^2) + \frac{\partial g_{n,m}}{\partial \varrho} \cdot \frac{(1 - 2\varrho^2)}{\varrho} + g_{n,m} \Big(n(n+1) - \frac{m^2}{\varrho^2} \Big) = 0,$$

$$9.^* \quad \frac{\partial^2 h_{n,m}}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho^2) + \frac{\partial h_{n,m}}{\partial \varrho} \cdot \frac{(1 - 2\varrho^2)}{\varrho} + h_{n,m} \Big(n(n+1) - \frac{m^2}{\varrho^2} \Big) = 0.$$

Für $r = r_0$ mag das entsprechende ϱ mit ϱ_0 bezeichnet werden. Aufserdem ist zu bemerken, dafs in der ersten Aufgabe für das abgeplattete Ellipsoïd ϱ zwischen 1 und ϱ_0 liegt; für das verlängerte zwischen 0 und ϱ_0; bei der zweiten zwischen ϱ_0 und ∞. e kann man, wenn es reell ist, positiv nehmen, so dafs dann ϱ positiv und reell ist: ist e imaginär, so wird ϱ imaginär. In letzterem Falle mag e, welchem man ein beliebiges Vorzeichen geben kann, so genommen werden, dafs ϱ gleich dem positiven

(reellen) Zahlwerth dieser Gröfse multiplicirt in i ist; i mag aber eine *bestimmte* Wurzel aus -1 bedeuten, die ich die positive nennen will. Ist dieses festgesetzt, so ist keine Zweideutigkeit möglich.

Es wird jetzt darauf ankommen, (9.) und (9.*) zu integriren. *Eine* partielle Lösung dieser Gleichungen läfst sich ohne Mühe finden, indem (9.), wenn man darin ϱ für den Augenblick gleich einem Sinus setzt, z. B. $=\sin\theta$, in

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial g_{n,m}}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)g_{n,m}=0$$

übergeht; die Auflösung dieser Gleichung ist bekanntlich $P_{n,m}$. Man sieht leicht ein, dafs, wenn man ϱ für $\sin\theta$ wieder herstellt, die Form der endlichen Reihe (6.*) nur insofern verändert wird, dafs für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ in dieser ϱ und resp. $\sqrt{(1-\varrho^2)}$ zu setzen ist, so dafs eine Auflösung der Gleichungen (9.) und (9.*) die folgende endliche Reihe sein wird:

$$10.\quad \varrho^m\Big(\sqrt{(1-\varrho^2)}^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2.(2n-1)}\sqrt{(1-\varrho^2)}^{n-m-2}$$
$$+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\sqrt{(1-\varrho^2)}^{n-m-4}\Big).$$

Diese setzen wir zur Abkürzung $=P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$, so dafs das frühere $P_{n,m}$ jetzt gleich $P_{n,m}[\cos\theta]$ ist. Eine Zweideutigkeit ist hier nicht möglich, da für ein gegebenes θ der $\sin\theta$ und $\cos\theta$ *nur einen* Werth annehmen. Anders verhält es sich mit $P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$. Wie auch die Wurzel genommen wird, hat man ein particulaires Integral der Gleichungen (9.) und (9.*). Um einen eindeutigen Ausdruck zu haben, reicht es hin, festzusetzen, dafs für ein imaginäres ϱ die positive Wurzel der (reellen) Gröfse $1-\varrho^2$ zu nehmen sei: für ein reelles ϱ dagegen, für welches (s. oben) ϱ zugleich nicht kleiner als 1 sei, $\sqrt{(1-\varrho^2)}$ gleich der positiven Wurzel aus ϱ^2-1 multiplicirt in i sei. Wie man die P mit verschiedenen m, aber demselben n durch Differentialquotienten derselben Gröfse darstellen könne, findet man in *Anmerkung 1.* entwickelt; als bestimmte Integrale sind diese Functionen in *Anmerkung 2.* dargestellt.

Was die *zweite* Auflösung der Gleichungen (9.) und (9.*) betrifft, so scheint sie sich nicht eben so einfach wie die erste darstellen zu lassen, wenn man gleich alle Q (insofern man den Buchstaben Q, entsprechend dem P, für dieses particuläre Integral anwendet) mit demselben n, aber ver-

schiedenem m, auch hier durch Differentialquotienten derselben Gröfse darstellen kann (*Anmerkung 1.*). Jedenfalls kann man sich (*Anmerkung 3.*) für $Q_{n,m}$ einer der beiden Reihen bedienen:

$$11. \begin{cases} Q_{n,m} = \varrho^{-(n+1)} F(\tfrac{1}{2}(n+1-m),\ \tfrac{1}{2}(n+1+m),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \varrho^{-2}), \\ Q_{n,m} = \varrho^{-m}(\sqrt{(1-\varrho^2)})^{-(n-m+1)} F\left(\tfrac{1}{2}(n-m+1),\ \tfrac{1}{2}(n-m+2),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung die gewöhnliche Bezeichnung der hypergeometrischen Reihe angewandt, d. h. das Zeichen $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$ gesetzt ist. Wenn wir die obere Reihe (11.) bei den abgeplatteten Ellipsoïden gebrauchen, wo ϱ reell und nicht kleiner als 1 ist, die andere bei den verlängerten, wo $1-\varrho^2$ zwischen 1 und ∞ liegt, so werden wir convergirende Ausdrücke haben, indem $\alpha+\beta-\gamma$ nicht positiv ist *). Jedenfalls wird für $\varrho=0$, ein Fall der nur bei dem verlängerten Ellipsoïd eintreten kann, $Q_{n,m}=\infty$; selbst wenn $m=0$ ist. Man hat nämlich in dem letzteren Falle ($\varrho=0$, $m=0$) aus der zweiten Gleichung in (11.):

$$Q_{n,m} = F(\tfrac{1}{2}(n+1),\ \tfrac{1}{2}(n+2),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ 1);$$

welches unendlich ist, indem $\alpha+\beta-\gamma=0$. In der *Anmerkung 4.* ist gezeigt, wie man aus vorhergehenden $Q_{n,m}$ und $P_{n,m}$ die nachfolgenden leicht berechnen kann.

Sollte es nöthig sein, auch den Q das Argument ϱ hinzuzufügen, so kann dies, wie bei den P, dadurch geschehen, dafs in (11.) für $Q_{n,m}$, $Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ gesetzt wird, und zwar der Gleichförmigkeit halber in beiden Formeln. Wird die Wurzel so bestimmt, wie es oben geschehen ist, und bemerkt man, dafs ϱ positiv genommen wird, so ist keine Zweideutigkeit möglich.

§. 3.

Setzt man für $g_{n,m}$ und $h_{n,m}$ ihre so eben gefundenen Werthe, nämlich die Summe der beiden particulären Integrale $P_{n,m}$ und $Q_{n,m}$, jedes in einen noch willkürlichen Zahlwerth multiplicirt, so geht (6.) in die folgende Gleichung über:

$$12. \quad X_n = \sum_{m=0}^{m=n} (P_{n,m}[\cos\theta].P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}](k_{n,m}\cos m\varphi + l_{n,m}\sin m\varphi))$$
$$+ \sum_{m=0}^{m=n} (P_{n,m}[\cos\theta].Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}](k'_{n,m}\cos m\varphi + l'_{n,m}\sin m\varphi)).$$

---

*) Comment. Gotting. Disquisitiones gen. circa ser. infin. etc. auct. *Gauss* pag. 19.

Wie auch k, l, k' und l' bestimmt sein mögen: immer wird X_n der Gleichung (4.) und (5.) genügen. Es wird sich zeigen, dafs im Allgemeinen bei der ersten Aufgabe $k_{n,m}$ und $l_{n,m}$ von Null verschieden sein werden und dafs dagegen $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ verschwinden müssen; bei der zweiten Frage verhält es sich grade umgekehrt; bei der dritten endlich werden alle k, l, k' und l' einen von Null verschiedenen Werth haben. Am leichtesten ist die Behandlung der zweiten Aufgabe; weshalb wir uns zunächst mit derselben beschäftigen wollen.

1. Es handelt sich hier darum, das Potential u eines mit Masse erfüllten Ellipsoïds oder seiner mit Masse belegten Oberfläche für alle Puncte des äufsern Raumes zu finden, wenn dasselbe für die auf der Oberfläche befindlichen als eine Function von θ und φ, z. B. $f(\theta, \varphi)$ gegeben ist. Offenbar verschwindet dieses für einen unendlich entfernten Punct, d. h. man hat $u=0$ für $\varrho=\infty$; oder da $u=\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$, auch $X_n=0$ für $\varrho=\infty$. Macht man nun in (12.) $\varrho=\infty$, so wird $P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]=\infty$; dagegen $Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]=0$; es kann also X_n nicht für jedes φ gleich Null sein, wenn nicht $k_{n,m}=l_{n,m}=0$ ist. Läfst man in (12.) alle Constanten $k_{n,m}$ und $l_{n,m}$ verschwinden, so geht dies über in

$$12. \quad X_n=\sum_{m=0}^{m=n}(P_{n,m}[\cos\theta]\,Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}](k'_{n,m}\cos m\varphi+l'_{n,m}\sin m\varphi)).$$

Der Werth, den X_n für $\varrho=\varrho_0$ annimmt, ist durch die Bestimmung gegeben, dafs für die Oberfläche u sich in $f(\theta,\varphi)$ verwandeln mufs, welches bekanntlich nur geschehen kann, wenn man, für $\varrho=\varrho_0$,

$$13. \quad X_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\partial\theta_1\sin\theta_1\int_0^{2\pi}P_n f(\theta_1,\varphi_1)\,\partial\varphi_1$$

hat, wo P_n, oder, wie wir es auch mit Beifügung des Arguments nennen wollen, $P_n[\cos\gamma]$, den Coëfficienten der $n$ten Potenz von α bedeutet, wenn man $\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}$ nach aufsteigenden Potenzen von α entwickelt, und wo ferner zur Abkürzung $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)$ gesetzt ist. Führt man die Reihen-Entwicklung der Wurzelgröfse wirklich aus, so ist, wie man weifs,

$$P_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left(\cos^n\gamma-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2}\gamma+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\gamma-\ldots\right),$$

wodurch man auf der Stelle

$$P_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.3\dots n} P_{n,0}[\cos\gamma] = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{(n)!\,(n)!} P_{n,0}[\cos\gamma]$$

erhält.

Die Kenntnifs des Werthes von X_n für $\varrho = \varrho_0$ führt unmittelbar zur Bestimmung der Zahlwerthe $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$. Macht man nämlich für den Augenblick $\varrho = \varrho_0$ in (12.*), und das entstandene X_n gleich dem in (13.), so entsteht:

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi \partial\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{2\pi} P_n f(\theta_1,\varphi_1)\,\partial\varphi_1$$
$$= \sum_{m=0}^{m=n} (P_{n,m}[\cos\theta]\, Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}](k'_{n,m}\cos m\varphi + l'_{n,m}\sin m\varphi)).$$

Vermittelst eines Satzes, den *Laplace* an dem schon oben angeführten Orte bewiesen hat, läfst sich die linke Seite der vorstehenden Gleichung ebenfalls nach Sinus und Cosinus der Vielfachen des Winkels φ entwickeln, so dafs wir jedem mit $\cos m\varphi$ oder $\sin m\varphi$ multiplicirten Gliede der rechten Seite ein Glied mit demselben Factor auf der linken Seite gleichsetzen können. In der That hat man

$$P_n[\cos\gamma] = \sum_{m=0}^{m=n} (a_{n,m}\cos m(\varphi-\varphi_1) P_{n,m}[\cos\theta]\, P_{n,m}[\cos\theta_1]).$$

wo zur Abkürzung $a_{n,m} = 2\frac{(1.3.5\dots(2n-1))^2}{(n-m)!\,(n+m)!}$ gesetzt ist, $a_{n,0}$ aber $= \left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{(n)!}\right)^2$ ist. Schreibt man nun für $\cos m(\varphi-\varphi_1)$ seine Entwicklung $\cos m\varphi\cos m\varphi_1 + \sin m\varphi \sin m\varphi_1$, so hat man, vermöge der oben angedeuteten Operation,

$$k'_{n,m} = \frac{2n+1}{4\pi}\cdot a_{n,m}\cdot\frac{1}{Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}\int_0^\pi \partial\theta_1 \sin\theta_1 P_{n,m}[\cos\theta_1]\int_0^\pi f(\theta_1,\varphi_1)\cos m\varphi_1\,\partial\varphi_1,$$

$$l'_{n,m} = \frac{2n+1}{4\pi}\cdot a_{n,m}\cdot\frac{1}{Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}\int_0^\pi \partial\theta_1 \sin\theta_1 P_{n,m}[\cos\theta_1]\int_0^\pi f(\theta_1,\varphi_1)\sin m\varphi_1\,\partial\varphi_1.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (12.*) erlangen wir für das unserem Falle entsprechende u die Schlufsformel

$$14.\quad u = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\sum_{m=0}^{m=n}\left(a_{n,m}P_{n,m}[\cos\theta]\frac{Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}\int_0^\pi \partial\theta_1\sin\theta_1 P_{n,m}[\cos\theta_1]\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\int_0^\pi f(\theta_1,\varphi_1)\cos m(\varphi-\varphi_1)\,\partial\varphi_1\right)\right).$$

2. Wir gehen jetzt zu der Aufgabe über, den Zustand des Gleichgewichts der Wärme in einem Ellipsoïd zu finden, an dessen Oberfläche

die durch $f(\theta, \varphi)$ ausgedrückte Temperatur erhalten wird. Man sieht leicht ein, dafs man für das *verlängerte* Ellipsoïd eine Endformel erhält, die aus der im vorhergehenden Falle entwickelten dadurch entsteht, dafs für Q in (14.) der Buchstabe P gesetzt wird. Macht man nämlich in (12.) nicht mehr $\varrho = \infty$ (ein Werth den ϱ wohl bei der vorigen Frage, nicht aber bei dieser erlangen kann), sondern $\varrho = 0$, so wird $Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}] = \infty$ (§ 2.): also wird, da $P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}$ endlich bleibt, X_n nicht für alle θ und φ einen endlichen Werth einnehmen können, wenn nicht $k'_{n,m} = l'_{n,m} = 0$ wird. Von hier an giebt ein, dem in No. 1. angewandten ganz ähnliches Verfahren,

$$15. \quad u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{2n+1}{4\pi} \sum_{m=0}^{m=n} \left(a_{n,m} P_{n,m}[\cos\theta] \frac{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} \int_0^{\pi} \partial\theta_1 \sin\theta_1 P_{n,m}[\cos\theta_1] \times \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) \cos m(\varphi - \varphi_1) \partial\varphi_1 \right)\right).$$

Ist das Ellipsoïd ein *abgeplattetes*, so wird dieselbe Formel (15.) den fraglichen Wärmezustand angeben; jedoch mufs ein Beweis dieser Behauptung hinzugefügt werden, indem die Herleitung von (15.) verlangte, dafs es erlaubt sei, $\varrho = 0$ zu setzen. Dafs (15.) auch in dem Falle des abgeplattetes Ellipsoïdes (4.) genügt, ist klar, da sie nur ein specieller Werth von (12.) ist. Dafs (15.) ferner für die Oberfläche ($\varrho = \varrho_0$) in $f(\theta, \varphi)$ übergeht, folgt sogleich aus bekannten Resultaten: dafs (15.) aber bei den abgeplatteten Ellipsoïden noch convergirt, bedarf eines Beweises, der in No. 1., so wie für die verlängerten Ellipsoïden in dieser Nummer unnöthig ist. Denn es ist klar, dafs den Annahmen in diesen Fällen ein und nur ein Wärmezustand oder Potential entspricht; wenn ihnen aber überhaupt ein Wärmezustand (Potential) entspricht, so kann es kein anderer (anderes) als der (des) in (15.) (resp. 14.) sein, indem zunächst u sich immer, und immer nur auf eine Art in eine Reihe von X_n entwickeln läfst, und zwar dieses wiederum nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von φ, indem endlich ein u, oder vielmehr das u nothwendig durch (12.) dargestellt werden mufs. Indem wir $\varrho = \infty$ oder $\varrho = 0$ machten, folgte wiederum mit Nothwendigkeit, dafs je zwei Gruppen von Constanten Null sein müssen: und dann ergeben sich für die übrig bleibenden Gruppen Werthe, die (14.) und (15.) hervorbringen. Sind $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ gleich Null gesetzt, so erhält man (15.). Die *Natur* des Problems verlangte eine solche Bestimmung für die verlängerten Ellipsoïden: für die abgeplatteten liegt in ihr die Willkürlichkeit, die das Bedürfnifs eines Beweises für diese Körper hervorruft,

der, wie oben auseinander gesetzt ist, darin besteht, dafs man zeigen mufs, *dafs die Formel (15.) auch für abgeplattete Ellipsoïden eine convergente Reihe bildet.* Ist $\varrho = \varrho_0$, so ist dieses bewiesen: ist aber $\varrho < \varrho_0$, so kann eine Divergenz wegen des Vorzeichens der einzelnen Glieder stattfinden. Hätte man die früheren Aufgaben als rein mathematische, nicht als physicalische betrachtet, so müfste auch für diese ein Convergenzbeweis geliefert werden, welcher dann dem ganz ähnlich geführt werden könnte, welcher sich in der *Anmerkung 5.* findet.

3. Bei der dritten Aufgabe, in welcher nach dem von der Zeit unabhängigen Wärmezustand in einem von zwei ellipsoïdischen Oberflächen mit gleichen Brennpuncten begrenzten Körper gefragt wird, werden aufser der Gleichung (1.) noch zwei Bedingungen zu berücksichtigen sein. Es mufs nämlich nicht nur $u = f(\theta, \varphi)$ für $\varrho = \varrho_0$ sein, sondern auch an der andern Grenzfläche, für die $\varrho = \varrho_1$ sein mag, mufs u in eine willkürlich gegebene Function von θ und φ z. B. $\psi(\theta, \varphi)$ übergehen. Setzt man wieder $u = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} X_n$, so wird (12.) die allgemeine Formel von X_n darstellen. In dieser Gleichung wird der besondere Werth ϱ_0 von ϱ ein gewisses X_n hervorbringen, welches mit X_n^0 bezeichnet werden mag; ϱ_1 mag X_n^1 entsprechen; es wird dann möglich sein, die vier Gruppen von Constanten $k_{n,m}$, $l_{n,m}$, $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ zu bestimmen, indem X_n^0 gleich dem durch (13.) gegebenen X_n sein mufs; ferner X_n^1 gleich einem Ausdruck, der aus (13.) durch Vertauschung des φ mit ψ entsteht. Setzt man für P_n die schon oben angewandte, nach Cosinus und Sinus der Vielfachen des Winkels φ fortschreitende Reihe, und beobachtet wieder, dafs die Coëfficienten von $\cos m\varphi$ und resp. $\sin m\varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen müssen, so hat man vier ähnlich gebildete Formeln, von welchen die eine

$$k_{n,m} P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}] + k'_{n,m} Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]$$
$$= \frac{2n+1}{4\pi} Q_{n,m} \int_0^{\pi} \partial\theta_1 \sin\theta_1 P_{n,m}[\cos\theta_1] \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) \cos m\varphi_1 \,\partial\varphi_1$$

ist. Vertauscht man rechts ψ mit f, so hat man links ϱ_1 für ϱ_0 zu setzen; schreibt man rechts $\sin m(\varphi - \varphi_1)$ für $\cos m(\varphi - \varphi_1)$, so ist links $k_{n,m}$ und $k'_{n,m}$ in $l_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ zu verändern. Aus den so entstandenen vier Gleichungen lassen sich auf die gewöhnliche Weise $k_{n,m}$, $l_{n,m}$, $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ eliminiren; setzt man dann die Werthe dieser Constanten in (12.) ein, so hat man als Endformel:

16. $$u=\sum_{n=0}^{n=\infty}\Big\{\frac{2n+1}{4\pi}\sum_{m=0}^{m=n}\Big(a_{n,m}P_{n,m}[\cos\theta]\cdot\frac{1}{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_1^2)}]-P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_1^2)}]Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}$$
$$\int_0^\pi\partial\theta_1\sin\theta_1 P_{n,m}[\cos\theta_1]\int_0^{2\pi}f(\theta_1,\varphi_1)(Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_1^2)}]P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]-Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_1^2)}])$$
$$+\psi(\theta_1,\varphi_1)(Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]-P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}])\cos m(\varphi-\varphi_1)\partial\varphi_1\Big)\Big\}.$$

§. 4.

Die Gleihungen (14.), (15.), (16.) gelten auch noch, wenn $e=0$ ist oder wenn das Ellipsoïd in eine Kugel übergeht. So wird z. B. in (14.) für $e=0$ zwar $\varrho=\infty$ und $\varrho_0=\infty$, aber das Verhältnifs $\frac{\varrho_0}{\varrho}=\frac{er_0}{er}$ nimmt den im Allgemeinen endlichen Werth $\frac{r_0}{r}$ an. Aus den Formeln (11.) sieht man ferner, dafs $Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ sich mit wachsendem ϱ der Grenze $\frac{1}{\varrho^{n+1}}$ nähert, wenn man einen von ϱ unabhängigen Factor unberücksichtigt läfst, der sich also forthebt, wenn man den Quotienten zweier Q mit gleichen m und n bildet. Es ist demnach $\frac{Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}=\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{n+1}=\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+2}$, also unabhängig von m, so dafs man die Summation nach m ausführen kann, indem der schon oben angewandte, von *Laplace* abgeleitete Satz

$$\sum_{m=0}^{m=n}(a_{n,m}P_{n,m}[\cos\theta]P_{n,m}[\cos\theta_1]\cos m(\varphi-\varphi_1)) = P_n[\cos\gamma],$$

$P_n[\cos\gamma]$, oder schlechtweg gleich P_n giebt. Für die Kugel geht also das u aus (14.) in

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}\int_0^\pi\partial\theta_1\sin\theta_1\int_0^{2\pi}f(\theta_1,\varphi_1)P_n\partial\varphi_1\right)$$

über; welches auch mit der auf gewöhnlichem Wege abgeleiteten Formel für die Aufgabe, um die es sich hier handelt, übereinstimmt.

Unter den speciellen Werthen der gegebenen Function $f(\theta,\varphi)$ verdienen zwei Beachtung: zuerst der wenn die Function von φ, dann aber der wenn sie zugleich von θ und φ unabhängig ist. Im ersten Falle mag $f(\theta,\varphi)=\chi(\theta)$ sein, so wird

$$\int_0^{2\pi}f(\theta_1,\varphi_1)\cos m(\varphi-\varphi_1)\partial\varphi_1 = \chi(\theta)\int_0^{2\pi}\cos m(\varphi-\varphi_1)\partial\varphi_1$$

gleich 0 oder 2π, je nachdem $m>0$ oder $m=0$ ist. In den vollständigen Ausdrücken für u reducirt sich demnach jede Summe nach m auf ihr erstes Glied, so dafs man z. B. für das u in (14.) erhält:

17. $$u=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\cdot a_{n,0}\cdot\frac{Q_{n,0}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{n,0}[(1-\varrho_0^2)]}\cdot P_{n,0}[\cos\theta]\int_0^\pi\partial\theta\sin\theta P_{n,0}[\cos\theta]\chi(\theta)\right).$$

Berücksichtigt man den Zahlwerth von $a_{n,0}$ und den Zusammenhang der Function $P_n[\cos\theta]$ mit $P_{n,0}[\cos\theta]$, so geht (17.) in die einfachere Gestalt

$$17.^* \quad u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{Q_{n,0}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{n,0}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} \cdot P_n[\cos\theta] \int_0^\pi \partial\theta \sin\theta P_n[\cos\theta]\chi(\theta)\right)$$

über. Hätte man auch in (15.) $f(\theta,\varphi) = \chi(\theta)$ gesetzt, so wäre eine Formel entstanden, die aus (17.*) hervorgeht, wenn man darin $\frac{Q_{n,0}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{n,0}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}$ mit $\frac{P_{n,0}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{n,0}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}$ vertauscht.

Ist $\chi(\theta)$ nun auch von θ unabhängig, d. h. gleich einer Constanten k, so ist $\int_0^\pi \partial\theta \sin\theta P_{n,0}[\cos\theta]$, also auch $\int_0^\pi \partial\theta \sin\theta P_n[\cos\theta]$ gleich 0, so lange n von 0 verschieden ist; für $n = 0$ wird dagegen $\int_0^\pi \partial\theta \sin\theta P_n[\cos\theta] = 2$ (*Anmerkung 6.*), so dafs sich unter der letzten Annahme (17.*) in

$$17.^{**} \quad u = K.\frac{Q_{0,0}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{0,0}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}$$

verwandelt. Aus (15.) hätte man erhalten

$$u = K.\frac{P_{0,0}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{0,0}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} = K.$$

Es läfst sich übrigens (17.**) in eine übersichtlichere Form bringen, wenn man für $Q_{0,0}$ seinen Werth aus *Anmerkung 3.* setzt, wodurch man für abgeplattete Ellipsoïden

$$u = k.\frac{\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho}\right)}{\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho_0}\right)}$$

erhält; wo der Arcus so zu nehmen ist, dafs er für $\varrho = \infty$ verschwindet, für $\varrho = 1$ aber $= +\frac{1}{2}\pi$ wird. Für verlängerte Ellipsoïden hat man

$$u = k.\frac{\log\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}+1}{\sqrt{(1-\varrho^2)}-1}\right)}{\log\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho_0^2)}+1}{\sqrt{(1-\varrho_0^2)}-1}\right)}.$$

Aus dem Obigen übersieht man leicht, wie die Formel (16.) sich verändern wird, wenn man in ihr nicht nur $f(\theta,\varphi) = k$, sondern auch $\psi(\theta,\varphi)$ constant $= k'$ setzt. Für abgeplattete Ellipsoïden geht nämlich (16.) in

$$18. \quad u = \frac{k\left(\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho_1}\right) - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho}\right)\right) + k'\left(\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho}\right) - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho_0}\right)\right)}{\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho_1}\right) - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho_0}\right)}$$

über, wo der Arcus wie oben zu verstehen ist; für verlängerte dagegen in

$$19. \quad u = \frac{\log\left(\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho_1^2)}+1}{\sqrt{(1-\varrho_1^2)}-1}\cdot\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}-1}{\sqrt{(1-\varrho^2)}+1}\right)^k\cdot\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}+1}{\sqrt{(1-\varrho^2)}-1}\cdot\frac{\sqrt{(1-\varrho_0^2)}-1}{\sqrt{(1-\varrho_0^2)}+1}\right)^{k'}\right)}{\log\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho_1^2)}+1}{\sqrt{(1-\varrho_1^2)}-1}\cdot\frac{\sqrt{(1-\varrho_0^2)}-1}{\sqrt{(1-\varrho_0^2)}+1}\right)}.$$

Man sieht hieraus, dafs die verschiedenen Ellipsoïden mit gleichen Brennpuncten, deren grofse oder resp. kleine Halb-Achsen ϱ sind, isotherme Flächen vorstellen; die Temperatur eines jeden von ihnen, die eben nach dem Begriffe der isothermen Fläche auf der ganzen Ausdehnung eines bestimmten Ellipsoïds unveränderlich ist, wird durch (18.) oder (19.) gegeben, deren allgemeine Form:

$$18.^* \quad u = \mathfrak{a}\,.\,\text{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho}\right) + \mathfrak{b},$$

$$19.^* \quad u = \mathfrak{A}\,.\,\text{tang}\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}+1}{\sqrt{(1-\varrho^2)}-1}\right) + \mathfrak{B}$$

ist, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von ϱ unabhängige Gröfsen bedeuten. In dieser Gestalt stimmen unsere Formeln mit denen überein, welche *Lamé* als specielle Fälle in einer Abhandlung über isotherme Flächen hergeleitet hat *),
[indem (18.*) sich auch in

$$u = \alpha\,.\,\text{arc}\left(\cos = \frac{1}{\varrho}\right) + \beta$$

verändern läfst, (19.*) in

$$u = \alpha' \log \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}-1}{\sqrt{(1-\varrho^2)}+1}\right)} + \beta'\Big];$$

wo er untersucht, wie ein Körper beschaffen sein mufs, damit er, wenn seine innere und äufsere Grenzfläche in constanten Temperaturen erhalten werden, Ellipsoïden zu isothermen Flächen hat.

Von den drei Fragen, deren Auflösungen durch (14.), (15.), (16.) gegeben werden, hat *Lamé* nur die eine, welche (15.) beantwortet, behandelt. Dafs sein Resultat mit (15.) übereinstimmt, ist in der *Anmerkung* 7. gezeigt, indem die E bei *Lamé* den P, die bestimmten Integrale im Nenner bei ihm den $a_{n;m}$ entsprechen.

---

*) *Liouville*, Journal de mathematiques. Tome II. pag. 147. Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en equilibre de température.

Anmerkung 1.

Die Differentialgleichung (9.) oder (9.*), nemlich

$$\frac{\partial^2 z_{n,m}}{\partial \varrho^2}(1-\varrho^2)+\frac{\partial z_{n,m}}{\partial \varrho}\cdot\frac{(1-2\varrho^2)}{\varrho}+z_{n,m}\left(n(n+1)-\frac{m^2}{\varrho^2}\right)=0,$$

von welcher wir zwei particuläre Integrale mit $P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ und $Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ bezeichnet haben, geht, wenn man $x=\sqrt{(1-\varrho^2)}$ setzt, die Wurzel so verstanden wie oben, in die Form

$$20.\quad (1-x^2)^2.\frac{\partial^2 z_{n,m}}{\partial x^2}-2x(1-x^2)\frac{\partial z_{n,m}}{\partial x}+z_{n,m}(n(n+1)-m^2-n(n+1)x^2)=0$$

über. Macht man $z_{n,m}=\varrho^{-m}.v_{n,m}=(\sqrt{(1-x^2)})^{-m}v_{n,m}$, so mufs $v_{n,m}$ der Differentialgleichung

$$21.\quad (1-x^2).\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2}+2(m-1)x.\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x}+(n(n+1)-m(m-1))v_{n,m}=0$$

genügen. Diese verwandelt sich durch Differentiation nach x in

$$(1-x^2).\frac{\partial^3 v_{n,m}}{\partial x^3}+2(m-2)x.\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2}+(n(n+1)-(m-1)(m-2)).\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x}=0.$$

Durch Vergleichung mit (21.), wenn man dort $m-1$ für m setzt, ergiebt sich sogleich, dafs $v_{n,m-1}=\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x}$ ist, wenn man die vorkommende Constante unberücksichtigt läfst. Ebenso ist auch $\frac{\partial v_{n,m-1}}{\partial x}=\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2}=v_{n,m-2}$ etc., und allgemein, wenn p eine ganze positive Zahl bedeutet, die m nicht übertrifft,

$$\frac{\partial^p v_{n,m}}{\partial x^p}=v_{n,m-p}.$$

Setzt man $m=n$, so lassen sich folglich aus *einem* v, nämlich $v_{n,m}$, alle übrigen mit gleichen n bestimmen, indem

$$\frac{\partial^p v_{n,n}}{\partial x^p}=v_{n,n-p},\qquad \frac{\partial^{n-m} v_{n,n}}{\partial x^{n-m}}=v_{n,m}.$$

Die Definition von $v_{n,n}$ ist durch die Gleichung

$$21.^*\quad (1-x^2).\frac{\partial^2 v_{n,n}}{\partial x^2}+2(n-1)x.\frac{\partial v_{n,n}}{\partial x}+2nv_{n,n}=0$$

gegeben, deren eine Auflösung $(x^2-1)^n$ ist, während die andere sich z. B. in Form einer Reihe aufstellen läfst, die nach Potenzen von x aufsteigt oder absteigt, je nachdem x, wenn es reell ist, oder der reelle Theil von x, wenn es imaginär ist, positiv genommen, die positive Einheit übertrifft, oder nicht übertrifft. Bezeichnen wir diese zweite particuläre Auflösung mit q_n, so ist

$$v_{n,n} = c_{n,0}.(x^2-1)^n + c'_{n,0}\, q_n,$$

$$v_{n,m} = c_{n,m}.\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}} + c'_{n,m}.\frac{\partial^{n-m} q_n}{\partial x^{n-m}};$$

endlich

$$22.\quad z_{n,m} = c_{n,m}.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}m}.\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}} + c'_{n,m}.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}m}.\frac{\partial^{n-m} q_n}{\partial x^{n-m}}.$$

Es ist zu bemerken, dafs der mit $c_{n,m}$ multiplicirte Theil von (22.) zu dem Ausdruck, welcher entsteht, wenn man darin $-m$ mit m vertauscht, in einem constanten Verhältnifs steht, so dafs auch

$$23.\quad z_{n,m} = k_{n,m}.(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}.\frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}} + c'_{n,m}.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}m}.\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}}$$

ist. Gerechtfertigt wird diese Behauptung durch die von *Jacobi* bewiesene Gleichung

$$24.\quad \frac{1}{(n-m)!}.\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}} = \frac{(x^2-1)^m}{(n+m)!}.\frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}}\ {}^{*}).$$

Der in $k_{n,m}$ multiplicirte Theil von (23.) unterscheidet sich nur durch eine Constante von $P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]$ oder $P_{n,m}[x]$, so dafs der in $c'_{n,m}$ multiplicirte Theil derselben Gleichung von $Q_{n,m}[x]$ gleichfalls nur durch eine Constante unterschieden sein kann; womit bewiesen ist, wie §. 2. verlangt wurde, dafs sich alle P mit gleichem n aber verschiedenem m durch Differentialquotienten derselben Gröfse darstellen lassen; und dasselbe für die Q. Um den in $k_{n,m}$ multiplicirten Theil auf die Form der Reihe (10.) zu bringen, kann man $(x^2-1)^n$ z. B. $p$mal nach x differentiiren, welches die Gleichung

$$\frac{\partial^p(x^2-1)^n}{\partial x^p} = (2n)(2n-1)(2n-2)\dots(2n-p+1)\Big(x^{2n-p} - \frac{(2n-p)(2n-p-1)}{2.(2n-1)}x^{2n-p-2} + \frac{(2n-p)(2n-p-1)(2n-p-2)(2n-p-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{2n-p-4} - \dots\Big)$$

giebt. Macht man darauf $p=n+m$ und multiplicirt auf beiden Seiten mit $(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}$, so hat man auf der linken Seite $(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}.\frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}}$, rechts aber $(2n)(2n-1)(2n-2)\dots(n-m+1)$, multiplicirt in $P_{n,m}[x]$. Es ist also

$$25.\quad P_{n,m}[x] = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}}{(n-m+1)(n-m+2)\dots(2n)}.\frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}},$$

oder auch, mit Anwendung von (24.),

$$25.^*\quad P_{n,m}[x] = \frac{(-1)^m.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}m}}{(n+m+1)(n+m+2)\dots(2n)}.\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}}.$$

---

*) Gegenw. Journal Bd. II. pag. 225.

Es sei noch bemerkt, dafs wenn man $z_{n,m} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}m}.u_{n,m}$ gemacht hätte, Resultate für $u_{n,m}$ entstanden wären, ganz ähnlich denen, welche für $v_{n,m}$ im Vorhergehenden entwickelt worden sind. Der Zusammenhang zwischen $u_{n,m}$ und $v_{r,m}$, welcher aus der ersten und der eben angegebenen Substitution folgt, würde dann von selbst das hier entlehnte Resultat, welches durch (24.) ausgedrückt wird, gegeben haben.

Anmerkung 2.

Bekanntlich ist

$$26.\quad ((x+h)^2-1)^n = (x^2-1)^n + \frac{h}{1}.\frac{\partial(x^2-1)^n}{\partial x} + \frac{h^2}{1.2}.\frac{\partial^2(x^2-1)^n}{\partial x^2} + \dots$$
$$\dots + \frac{h^{2n}}{1.2.3\dots(2n)}.\frac{\partial^{2n}(x^2-1)^n}{\partial x^{2n}}.$$

Multiplicirt man (26.) auf beiden Seiten mit $\frac{1}{h^n}$, macht darauf $h = iy\varrho$, wo $i = \sqrt{-1}$ und $\varrho = \sqrt{(1-x^2)}$ gesetzt ist, die Wurzelzeichen so verstanden, wie sie schon oben erklärt wurden, und ordnet dann nach Potenzen von y, so werden nach (24.) die Coëfficienten von $(\varrho i y)^{-n+m}$ und $(\varrho i)^{-n+m}.y^{n-m}$ einander gleich. Es sind diese nämlich

$$\frac{1}{(m)!}.\frac{\partial^m(x^2-1)^n}{\partial x^m} \quad \text{und} \quad \frac{(-\varrho^2)^{n-m}}{(2n-m)!}.\frac{\partial^{2n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{2n-m}}.$$

Man hat demnach:

$$27.\quad (yi\varrho)^{-n}((x+h)^2-1)^n = (i\varrho)^{-n}.\sum_{m=0}^{m=n}\left(\frac{(i\varrho)^m}{(m)!}.(y^{n-m}+y^{-n+m}).\frac{\partial^m(x^2-1)^n}{\partial x^m}\right),$$

wo unter (0)! die Einheit zu verstehen ist und unter $\frac{\partial^0(x^2-1)^n}{\partial x^0}$ die Function $(x^2-1)^n$ selbst; wo endlich für $m=n$ die Hälfte des auf der rechten Seite entstehenden Werthes genommen werden mufs, indem nur ein Glied mit jeder Potenz von y multiplicirt ist, hier aber y^{n-m} mit y^{-n+m} zusammenfällt. Macht man daher $y = e^{i\varphi}$, so entsteht (da $y^{n-m}+y^{-n+m} = 2\cos(n-m)\varphi$):

$$28.\quad 2^n(x+\cos\varphi\sqrt{(x^2-1)})^n$$
$$= \frac{1}{(n)!}.\frac{\partial^n(x^2-1)^n}{\partial x^n} + 2\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{2}m}}{(n-m)!}.\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}}.\cos m\varphi\right) *).$$

Es ist zu bemerken, dafs in (28.), in Folge der Gleichung (24.), m mit $-m$ unter dem Summenzeichen vertauscht werden kann. Setzt man für die

*) Dadurch, dafs man $(1+x\cos\varphi)^n$ nach Cosinus der Vielfachen des Winkels φ entwickelt (Instit. calc. integr. Vol. I. cap. VI) geht das einfache Bildungsgesetz der Coëfficienten, welches sich bei der Entwicklung eines Ausdrucks von der Form $(x+\cos\varphi\sqrt{(x^2-1)})^n$ herausstellt, verloren.

Differentialquotienten von $(x^2-1)^n$ ihre Werthe aus Anmerkung 1., so wird

$$29. \quad (x+\cos\varphi\sqrt{(x^2-1)})^n$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n.(n)!}.P_{n,0}[x]+\frac{1}{2^{n-1}}.\sum_{m=1}^{m=n}\left(i^m.\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(2n)}{(n+m)!}.P_{n,m}[x]\cos m\varphi\right),$$

$$30. \quad P_{n,m}[x]=\frac{2^n}{\pi}.\frac{i^{-m}}{(2n)!}.(n-m)!\,(n+m)!\int_0^\pi(x+\cos\varphi\sqrt{(x^2-1)})^n\cos m\varphi\,\partial\varphi;$$

den Fall $m=0$ nicht ausgeschlossen.

Aus der Betrachtung des bestimmten Integrals in (30.) lassen sich durch Differentiiren unter dem Integral die $P_{n,m}[x]$ durch Differentialquotienten der Function $(x^2-1)^n$ ebenso ausdrücken, wie es in der vorigen Anmerkung geschehen ist. Das dabei anzuwendende Verfahren ist dem ganz ähnlich, welches bei der Auflösung der Differentialgleichung auseinandergesetzt ist. Dabei ergiebt sich von selbst die Fundamentalgleichung (24.).

Anmerkung 3.

Hier soll die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z_{n,m}}{\partial\varrho^2}.(1-\varrho^2)+\frac{\partial z_{n,m}}{\partial\varrho}.\frac{(1-2\varrho^2)}{\varrho}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{\varrho^2}\right)z_{n,m}=0$$

noch einmal betrachtet werden, um daraus bequeme Formeln für $Q_{n,m}[x]$ zu finden. Bei dieser Gelegenheit wird man wieder die Auflösung $P_{n,m}[x]$ finden, die dann so einzurichten ist, d. h. deren Constante so zu wählen ist, dafs sie mit dem, was sie in den frühern Anmerkungen bedeutete, übereinstimmt.

Es mag ϱ nicht kleiner als 1 sein: eine Bedingung, die zufolge unserer Aufgabe erfüllt wird, so oft e reell ist; bei imaginärem ϱ mag dieses so verstanden werden, dafs der positive reelle Zahlwerth von ϱ nicht kleiner als 1 ist. Versucht man dann, die vorliegende Gleichung durch Reihen zu integriren, welche nach Potenzen von ϱ absteigen, so erhält man:

$$31. \quad z_{n,m}=c_{n,m}.\varrho^n\Big(1-\frac{n^2-m^2}{n(n+1)-(n-1)(n-2)}.\varrho^{-2}$$
$$+\frac{(n^2-m^2)((n-2)^2-m^2)}{(n(n+1)-(n-1)(n-2))(n(n+1)-(n-3)(n-4))}.\varrho^{-4}+\dots\Big)$$
$$+k_{n,m}\varrho^{-(n+1)}\Big(1+\frac{(n+1)^2-m^2}{(n+2)(n+3)-n(n+1)}.\varrho^{-2}$$
$$+\frac{((n+1)^2-m^2)((n+3)^2-m^2)}{((n+2)(n+3)-n(n+1))((n+4)(n+5)-n(n+1))}.\varrho^{-4}+\dots\Big).$$

Wie solche Integrationen auszuführen sind, ist hinlänglich bekannt; man erhält den obigen Ausdruck sogleich aus den von *Euler* *) angegebenen Formeln, die für eine Differentialgleichung entwickelt sind, von der die unsrige ein specieller Fall ist. Durch Anwendung der identischen Formel

$$z(z+1)-n(n+1) = (z-n)(z+n+1)$$

läfst sich sowohl der mit $c_{n,m}$ als auch der mit $k_{n,m}$ multiplicirte Theil von (31.) auf die Gestalt einer hypergeometrischen Reihe bringen; und zwar hat man, mit Benutzung der schon früher gebrauchten gewöhnlichen Bezeichnungsart:

$$z_{n,m} = c_{n,m}\varrho^n F(-\tfrac{1}{2}(n+m), -\tfrac{1}{2}(n-m), \tfrac{1}{2}(2n-1), \varrho^{-2})$$
$$+k_{n,m}\varrho^{-(n+1)}F(\tfrac{1}{2}(n+1-m), \tfrac{1}{2}(n+1+m), \tfrac{1}{2}(2n+3), \varrho^{-2}).$$

Man bemerkt sogleich, dafs der Factor von $k_{n,m}$ das ist, was wir (11.) mit $Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ für das abgeplattete Ellipsoïd bezeichnet haben, so dafs nur noch die zweite Form dieses particulären Integrals zu entwickeln bleibt, welche sich auf das verlängerte Ellipsoïd bezieht. Der Weg, welcher uns zu dieser führen wird, mag jedoch nur als ein heuristischer betrachtet werden, da einige Uebergänge durch divergirende Reihen geschehen. Nichtsdestoweniger wird das Resultat brauchbar: denn wie man durch wirkliche Differentiation leicht einsieht, genügt dasselbe der Differentialgleichung, ist aber zugleich für die vorkommenden Werthe von ϱ eine convergente Reihe (§. 2.). Die Relationen, welche *Kummer* **) zwischen hypergeometrischen Reihen mit verschiedenen Elementen angegeben hat, werden uns ohne Mühe die verlangte Formel verschaffen. Von den vielen, in seiner Abhandlung angegebenen Gleichungen benutzen wir die folgenden:

$$(\text{No. } 49.)\quad F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) = F(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{(1-x)})),$$

$$(\text{No. } 55.)\quad F(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1), x)$$
$$= (1-2x)^{-\alpha}F\left(\tfrac{1}{2}\alpha, \tfrac{1}{2}(\alpha+1), \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1), \frac{4x^2-4x}{4x^2-4x+1}\right).$$

Durch die erste Gleichung geht der mit $k_{n,m}$ multiplicirte Theil in

$$\varrho^{-(n+1)}F\left(n+1-m,\ n+1+m,\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \frac{\varrho-\sqrt{(\varrho^2-1)}}{2\varrho}\right)$$

über, und dieses wiederum durch (No. 55.) in

$$\left(\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}\right)^{-(n+1-m)}.\varrho^{-(n+1)}.F\left(\tfrac{1}{2}(n+1-m),\ \tfrac{1}{2}(n+2-m),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right)$$

*) Instit. calc. integr. Vol. II. Sect. I. Cap. VIII.
**) Gegenw. Journal Bd. XV. pag. 77 u. 78.

oder

$$= i^{-(n+1-m)}.\varrho^{-m}.(\sqrt{(1-\varrho^2)})^{-(n+1-m)}.F\left(\tfrac{1}{2}(n+1-m),\ \tfrac{1}{2}(n+2-m),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right).$$

Macht man also $k_{n,m} = i^{n+1-m}$, so hat man die zweite Formel in (11.).

Der mit $c_{n,m}$ multiplicirte Theil nimmt durch (No. 49.) die Gestalt

$$\varrho^n F\left(-(n+m),\ -(n-m),\ -\tfrac{1}{2}(2n-1),\ \frac{\varrho-\sqrt{(\varrho^2-1)}}{2\varrho}\right)$$

an; dann durch (No. 55.) die doppelte Form (da $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x)$)

$$32.\quad \varrho^{-m}.(-1)^{\frac{1}{2}(n+m)}.(\sqrt{(1-\varrho^2)})^{n+m}.F\left(-\tfrac{1}{2}(n+m),\ -\tfrac{1}{2}(n+m-1),\ -\tfrac{1}{2}(2n-1),\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right),$$

oder

$$33.\quad \varrho^{m}.(-1)^{\frac{1}{2}(n-m)}.(\sqrt{(1-\varrho^2)})^{n-m}.F\left(-\tfrac{1}{2}(n-m),\ -\tfrac{1}{2}(n-m-1),\ -\tfrac{1}{2}(2n-1),\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right).$$

Den letzten Theil, dividirt durch $(-1)^{\frac{1}{2}(n-m)}$, haben wir $P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ genannt, so dafs der in $c_{n,m}$ multiplicirte Theil von (31.) zu $P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ das Verhältnifs $(-1)^{\frac{1}{2}(n-m)}:1$ hat: ein Resultat, welches hier wegen der letzten Anmerkung angeführt werden mufs. Wenn es sich gleich schon durch bedeutend einfachere Schlüsse herleiten läfst, so schien doch die *Zurückführung* des einen Polynoms auf das andere wünschenswerth. Endlich sei noch bemerkt, dafs durch Gleichsetzung von (32.) und (33.) folgender andere Ausdruck von (24.) erhalten wird:

$$34.\quad \varrho^{2m} F\left(-\tfrac{1}{2}(n-m),\ -\tfrac{1}{2}(n-m-1),\ -\tfrac{1}{2}(2n-1),\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right)$$
$$= (\varrho^2-1) F\left(-\tfrac{1}{2}(n+m),\ -\tfrac{1}{2}(n+m-1),\ -\tfrac{1}{2}(2n-1),\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right).$$

Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, für jedes ϱ das dazu gehörige $Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ zu finden. Für *einen* besondern Werth von m und n vereinfachen sich die mit F bezeichneten Reihen so, dafs man sie aus den gebräuchlichen Tafeln berechnen kann, ohne erst die einzelnen Glieder bis zu einem hinlänglich entfernten zu summiren. Setzt man nämlich $m = n = 0$, so giebt sowohl die Differentialgleichung (9.) unmittelbar, als auch unsere Reihe für Q bei verlängerten Ellipsoïden:

$$35.\quad Q_{0,0}[\sqrt{(1-\varrho^2)}] = \frac{1}{\sqrt{(1-\varrho^2)}}.F\left(\tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{3}{2},\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}+1}{\sqrt{(1-\varrho^2)}-1}\right);$$

dagegen bei abgeplatteten:

$$35.^*\quad Q_{0,0}[\sqrt{(1-\varrho^2)}] = \frac{1}{\varrho}.F\left(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \frac{1}{\varrho^2}\right) = \text{arc}\left(\sin = \frac{1}{\varrho}\right);$$

wo natürlich mit unendlichem ρ der Bogen verschwinden mufs, also zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Für die hier gebrauchten speciellen Werthe der Function F sind übrigens die Ausdrücke durch Logarithmus und Arcus in der *Gaufs*ischen Abhandlung über die hypergeometrische Reihe angegeben. *)

Anmerkung 4.

Das Geschäft, aus vorhergehenden $P_{n,m}$ oder $Q_{n,m}$ die nachfolgenden durch recurrirende Reihen zu berechnen, wird darin bestehen, zuerst, wenn zwei P (oder Q) mit gleichem n, aber verschiedenem m gegeben sind, die ganze Reihe der P (oder Q) mit demselben n und einem m, welches zwischen 0 und n liegt, zu finden; dann aber *aus dieser* (nun bekannten) Reihe zwei Glieder mit einem n, welches das vorige um eine Einheit übertrifft, herzuleiten; oder auch, was bei den P möglich sein wird, diese *unabhängig* zu berechnen. Die Betrachtungen der Anmerkung 1. werden uns ohne Mühe die verlangten Formeln verschaffen. Wie es dort geschehen ist, setzen wir auch hier $x=\sqrt{(1-\rho^2)}$, und zwar soll, wie oben, x die positive Wurzel vorstellen, wenn $1-\rho^2$ positiv ist, die positive imaginäre Wurzel aber, wenn $1-\rho^2$ negativ ist. Unter der positiven imaginären Wurzel werde ich nämlich dann die positive Wurzel aus ρ^2-1 verstehen, wenn man sie in i multiplicirt (§. 2.).

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir den ersten Theil unserer Aufgabe lösen, der wieder in drei Unterabtheilungen zerfällt. Deshalb untersuchen wir

I. *Die Relationen zwischen den P mit gleichem n, aber verschiedenem m.* Es war $\rho^m.P_{n,m}[x]$ ein particuläres Integral der Gleichung (21.). Nun ist

$$v_{n,m}=\rho^m.P_{n,m}[x]=(-1)^m.x^{n+m}.F\left(-\tfrac{1}{2}(n+m),-\tfrac{1}{2}(n+m-1),-\tfrac{1}{2}(2n-1),\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x}=(-1)^m.(n+m)x^{n+m-1}.F\left(-\tfrac{1}{2}(n+m-1),-\tfrac{1}{2}(n+m-2),-\tfrac{1}{2}(2n-1),\frac{1}{x}\right),$$
$$=-(n+m)v_{n,m-1},.$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x}=(n+m)(n+m-1)v_{n,m-2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (21.) hat man

---

*) Disquisitiones generales circa ser. infin. etc. pag. 5.

$$(n+m)(n+m-1)(1-x^2)v_{n,m-2} - 2(m-1)(n+m)xv_{n,m-1}$$
$$+(n(n+1)-m(m-1))v_{n,m} = 0,$$

oder, durch Division mit $n+m$:

$$(n+m-1)(1-x^2)v_{n,m-2} - 2(m-1)xv_{n,m-1} + (n-m+1)v_{n,m} = 0.$$

Setzt man wieder für $v_{n,m}$ seinen Werth $\varrho^m.P_{n,m}[x]$, so ist

$$36.\quad (n+m-1)P_{n,m-2}[x] - 2(m-1).\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}.P_{n,m-1}[x] + (n-m+1)P_{n,m}[x] = 0.$$

II. . *Die Relationen zwischen den Q mit gleichem n, aber verschiedenem m, bei verlängerten Ellipsoïden.* Für diese Körper mufs

$$\varrho^m.Q_{n,m}[x] = x^{-(n-m+1)}F\left(\tfrac{1}{2}(n-m+1),\ \tfrac{1}{2}(n-m+2),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \frac{1}{1-\varrho^2}\right)$$

ein particuläres Integral der Gleichung (21.) sein. Setzt man diesen Ausdruck also $= v_{n,m}$, so ist $\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} = -(n-m+1)v_{n,m-1}$, folglich $\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2} = (n-m+1)(n-m+2)v_{n,m-2}$. Durch diese Beziehungen nimmt (21.) die Form

$$(n-m+1)(n-m+2)(1-x^2)v_{n,m-2} - 2(m-1)(n-m+1)xv_{n,m-1}$$
$$+(n+m)(n-m+1)v_{n,m} = 0$$

an; endlich durch Division mit $(n-m+1)\varrho^m$ die Form

$$37.\quad (n-m+2)Q_{n,m-2}[x] - 2(m-1).\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}.Q_{n,m-1}[x] + (n+m)Q_{n,m}[x] = 0.$$

III. *Die Relationen zwischen den Q mit gleichem n, aber verschiedenem m, bei abgeplatteten Ellipsoïden.* Ein particuläres Integral der Gleichung (21.) wird in diesem Falle

$$v_{n,m} = \varrho^m Q_{n,m}[x] = \varrho^{-(n+1-m)}F(\tfrac{1}{2}(n+1-m),\ \tfrac{1}{2}(n+1+m),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \varrho^{-2})$$

sein, so dafs man auch hier den Satz der Anmerkung 1. anwenden kann, dafs $\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x}$ sich nur durch eine Constante $c_{n,m}$ von $v_{n,m-1}$ unterscheidet, da diese Beziehung, unabhängig von jeder Reihen-Entwicklung, in der besondern Beschaffenheit der Differentialgleichung (21.) begründet ist.

Es ist nun $\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} = \frac{\partial v_{n,m}}{\partial \varrho}.\frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\frac{\partial v_{n,m}}{\partial \varrho}.\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}}{\varrho}$ oder

$$= (n-m+1)\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}}{\varrho}.\varrho^{-(n+2-m)}.F(\tfrac{1}{2}(n-m+3),\ \tfrac{1}{2}(n+m+1),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \varrho^{-2}),$$

und dieses mufs gleich $c_{n,m}v_{n,m-1}$ sein, oder

$$= c_{n,m}.\varrho^{-(n+2-m)}.F(\tfrac{1}{2}(n+2-m),\ \tfrac{1}{2}(n+m),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \varrho^{-2}).$$

Um die Constante zu bestimmen setze ich $\varrho = \infty$, so wird $\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}}{\varrho} = i$, also $\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} = (n-m+1).i.v_{n,m-1}$, und ebenso

$$\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2} = -(n-m+1)(n-m+2)\,v_{n,m-2}.$$

Hierdurch erhält man:

$$-(n-m+1)(n-m+2)(1-x^2)\,v_{n,m-2} - 2(m-1)(n-m+1)\sqrt{(\varrho^2-1)}\,v_{n,m-1} + (n+m)(n-m+1)\,v_{n,m} = 0$$

oder, durch Division mit $(n-m+1)\varrho^m$:

$$38.\quad (n-m+2)Q_{n,m-2}[x] + 2(m-1).\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}.Q_{n,m-1}[x] - (n+m)Q_{n,m}[x] = 0.$$

Durch die Gleichungen (36.), (37.), (38.) ist der erste Theil unserer Aufgabe gelöset. Da man ferner für jedes n aus (10.)

$$P_{n,n}[\sqrt{(1-\varrho^2)}] = \varrho^n, \qquad P_{n,n-1}[\sqrt{(1-\varrho^2)}] = \varrho^{n-1}.\sqrt{(1-\varrho^2)}$$

hat, so lassen sich alle P leicht berechnen. Um sämmtliche Q ebenso bequem finden zu können, ist es nöthig, neue Formeln aufzustellen.

I. Bei verlängerten Ellipsoïden ist

$$Q_{n,m}[x] = \varrho^{-m}\Big(x^{-(n-m+1)} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2.(2n+3)}x^{-(n-m+3)} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n-m+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}x^{-(n-m-5)} + \dots\Big),$$

woraus man sogleich erhält:

$$x\varrho^m Q_{n,m}[x] - \varrho^{m+1}Q_{n,m+1}[x] = \frac{(n-m+1)}{(2n+3)}x^{-(n-m+2)} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{2.(2n+3)(2n+5)}$$

oder, wenn man für die Reihe auf der rechten Seite ihren Werth setzt:

$$39.\quad x\,Q_{n,m}[x] - \varrho\,Q_{n,m+1}[x] = \frac{(n-m+1)}{(2n+3)}\,Q_{n+1,m}[x].$$

II. Bei abgeplatteten Ellipsoïden ist

$$\varrho^{n+1}Q_{n,m}[x] = F(\tfrac{1}{2}(n+1-m),\ \tfrac{1}{2}(n+1+m),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \varrho^{-2}).$$

In der schon oft erwähnten *Gauss*schen Abhandlung findet sich die Gleichung

$$F(\alpha-1,\ \beta+1,\ \gamma,\ y) - F(\alpha,\beta,\gamma,y) = \frac{\alpha-\beta-1}{\gamma}\,y\,F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ y),$$

welche, auf unseren Fall angewandt, d. h. wenn man $\alpha = \frac{1}{2}(n+1-m)$, $\beta = \frac{1}{2}(n+m+1)$, $\gamma = \frac{1}{2}(2n+3)$, $y = \varrho^{-2}$ setzt,

$$\varrho^{n+1}Q_{n,m+2}[x] - \varrho^{n+1}Q_{n,m}[x] = -\frac{2(m+1)}{(2n+3)}.\varrho^n\,Q_{n+1,m+1}[x],$$

oder, nach der Division durch ϱ^n:

$$\varrho\,Q_{n,m+2}[x] - \varrho\,Q_{n,m}[x] + 2.\frac{(m+1)}{(2n+3)}.Q_{n+1,m+1}[x] = 0$$

giebt. Um diese Gleichung der andern (39.) entsprechend zu machen, kann man in (38.) für m den Werth $m+2$ setzen, wodurch man

$$Q_{n,m}[x] = \frac{(n+m+2)}{(n-m)} Q_{n,m+2}[x] - \frac{2(m+1)}{(n-m)} \cdot \frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho} \cdot Q_{n,m+1}[x]$$

erhält, welche Formel, mit der vorhergehenden verbunden,

$$\varrho Q_{n,m+2}[x]\left(1 - \frac{(n+m+2)}{(n-m)}\right) + \frac{2(m+1)}{(n-m)} \cdot \sqrt{(\varrho^2-1)} \cdot Q_{n,m+1}[x] + \frac{2(m+1)}{(2n+3)} \cdot Q_{n+1,m+1}[x] = 0$$

giebt; endlich

$$40. \quad \sqrt{(\varrho^2-1)} \cdot Q_{n,m}[x] - \varrho \cdot Q_{n,m+1}[x] + \frac{(n-m+1)}{(2n+3)} \cdot Q_{n+1,m}[x] = 0.$$

Ein Weiteres über den Gebrauch, welchen man von den hier entwickelten Formeln zu machen hat, hinzuzufügen, würde überflüssig sein.

Anmerkung 5.

Um zu beweisen, dafs (15.) auf der rechten Seite noch convergirt, wenn ϱ reell, nicht kleiner als 1, und von ϱ_0 verschieden ist, wollen wir versuchen, für den Quotienten $\frac{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}$ einen andern gröfsern zu setzen, der zugleich von so einfacher Gestalt ist, dafs die Reihe (15.) sich mit bekannten Reihen vergleichen läfst, und man daraus Schlüsse über ihre Convergenz ziehen kann. Zunächst wird sich die Ungleichheit

$$41. \quad \frac{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} < \frac{P_{n,m+2}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{n,m+2}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}$$

beweisen lassen, wo sowohl der Bruch auf der linken als der auf der rechten Seite des Ungleichheits-Zeichens positiv ist, indem $\sqrt{(1-\varrho^2)}$ hier mit $\sqrt{(1-\varrho_0^2)}$ zugleich positiv und imaginär wird, wenn wir die Sprache der früheren Anmerkungen beibehalten. Wie man aus (10.) ersieht, werden die Zähler und Nenner der beiden Brüche im Allgemeinen nicht positiv und reell sein: ein Umstand, der die vorkommenden Operationen ziemlich verwickeln würde, wenn man nicht, da eben die rechte Seite sowohl als auch die linke positiv ist, durch Multiplication mit einer Potenz von i im Zähler und Nenner zugleich, diesen sowohl als jenen positiv und reell machen könnte. Ich wähle deshalb μ unter den Zahlen 0, 1, 2, 3, ... so, dafs $i^\mu \cdot P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ reell und positiv ist, welches, wenn z. B. $n-m$ durch 4 ohne Rest theilbar ist, dann geschehen wird, wenn man $\mu = 0$ setzt. Dann wird, in Folge unserer Feststellung über $\sqrt{(1-\varrho^2)}$, $i^\mu \cdot P_{n,m-1}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ positiv und imaginär, $i^\mu \cdot P_{n,m-2}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ negativ und reell sein. Multiplicirt man nun (36.) mit i^μ und setzt es in die Form

$$42.\quad (n-m+1)i^{\mu}P_{n,m}[x]-2i^{\mu+1}.\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}.(m-1)P_{n,m-1}[x]$$
$$=-i^{\mu}(n+m-1)P_{n,m-2}[x],$$

so ist jedes Glied mit seinem Zeichen positiv. Macht man $\frac{-i^{\mu}P_{n,m-2}[x]}{-i^{\mu+1}P_{n,m-1}[x]}$ $=A_{m-1}$, und für $x=x_0$ gleich A^0_{m-1}, ebenso auch $\frac{-i^{\mu+1}P_{n,m-1}[x]}{i^{\mu}P_{n,m}[x]}=A_m$, und für $x=x_0$ gleich A^0_m (die Zähler und Nenner der verschiedenen A sind sämmtlich positiv und reell), so hat man aus (42.):

$$(n+m-1)A_{m-1}=\frac{(n-m+1)}{A_m}+2(m-1).\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho};$$

woraus man wiederum folgende beide Gleichungen zieht:

$$43.\quad (n+m-1).\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}.A_{m-1}=\frac{(n-m+1)}{\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A_m}+2(m-1).\frac{\varrho^2-1}{\varrho^2}\quad\text{und}$$

$$44.\quad (n+m-1).\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A_{m-1}=\frac{(n-m+1)}{\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}.A_m}+2(m-1).$$

Kann man nun für *einen* Werth von m zeigen, dafs *zugleich*

$$45.\quad \frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A_m>\frac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}.A^0_m\quad\text{und}\quad\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}.A_m<\frac{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}{\varrho_0}.A^0_m$$

ist, so wird nach (43.) und (44.) auch

$$\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A_{m-1}>\frac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}.A^0_{m-1}\quad\text{und}\quad\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}.A_{m-1}<\frac{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}{\varrho_0}.A^0_{m-1}$$

sein, d. h. so werden die Ungleichheiten (45.) für jedes m gelten, welches kleiner als das ist, von welchem ausgegangen wurde. Nun ist $A_n=\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}$, also gewifs

$$\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}.A_n<\frac{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}{\varrho_0}.A^0_n,$$

während $\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A=\frac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}.A^0_n$; dagegen ist schon

$$\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A_{n-1}>\frac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}.A^0_{n-1},$$

da $A_{n-1}=\frac{\varrho^2-1+\frac{1}{2n-1}}{\varrho\sqrt{(\varrho^2-1)}}$, also $\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A_{n-1}=1+\frac{1}{(2n-1)(\varrho^2-1)}$.

Schliefst also das Zeichen $>$ in der ersten Ungleichheit aus (45.) den einzelnen Fall der Gleichheit nicht aus, so sind diese beiden Formeln streng richtig für jedes m.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu der Gleichung (42.) zurück, welche, durch $-i^\mu . P_{n,m-2}[x]$ dividirt, die Form

$$(n-m+1)\frac{i^\mu P_{n,m}[x]}{-i^\mu P_{n,m-2}[x]} = (n+m-1)+\frac{2(m-1)\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}\cdot\frac{i^{\mu+1}P_{n,m-1}[x]}{-i^\mu P_{n,m-2}[x]}$$

oder gleich $(n+m-1)-2(m-1)\dfrac{1}{\dfrac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A_{m-1}}$ annimmt. Die Differenz auf der rechten Seite ist positiv, da die linke Seite reell und positiv ist. Berücksichtigt man (45.), so wird $\dfrac{1}{\dfrac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}}.A_{m-1}} < \dfrac{1}{\dfrac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}.A^0_{m-1}}$, also

$$\frac{i^\mu P_{n,m}[x]}{-i^\mu P_{n,m-2}[x]} > \frac{i^\mu P_{n,m}[x_0]}{-i^\mu P_{n,m-2}[x_0]}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{P_{n,m}[x]}{P_{n,m}[x_0]} > \frac{P_{n,m-2}[x]}{P_{n,m-2}[x_0]};$$

womit die Formel (41.) bewiesen ist.

Es wird also $\dfrac{P_{n,m}[x]}{P_{n,m}[x_0]}$ kleiner als $\dfrac{P_{n,n-1}[x]}{P_{n,n-1}[x_0]}$ oder als $\dfrac{P_{n,n}[x]}{P_{n,n}[x_0]}$ sein, je nachdem $n-m$ ungerade oder gerade ist, oder auch, da

$$\frac{P_{n,n-1}[x]}{P_{n,n-1}[x_0]} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{n-1}\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)}}{\sqrt{(1-\varrho_0^2)}} \quad \text{und} \quad \frac{P_{n,n}[x]}{P_{n,n}[x_0]} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n,$$

ganz allgemein

$$46. \qquad \frac{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} < \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n.$$

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen kehren wir weiter zu der Formel (15.) zurück, die scheinbar verwickelter gemacht wird, wenn man ein drittes Integral hinzufügt. Setzt man nämlich

$$\cos\gamma_2 = \cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi_2-\varphi_1),$$

so wird nach §. (3.)

$$a_{n,m}P_{n,m}[\cos\theta]P_{n,m}[\cos\theta_1]\cos m(\varphi-\varphi_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_n[\cos\gamma_1]\cos m(\varphi-\varphi_2)\partial\varphi_2$$

(für $m=0$ die Hälfte der rechten Seite genommen), so dafs zu untersuchen bleibt, ob die Reihe

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{2n+1}{4\pi^2}\sum_{m=0}^{m=n}\left(\int_0^\pi\partial\theta_1\sin\theta_1\int_0^{2\pi}\partial\varphi_1 f(\theta,\varphi_1)\int_0^{2\pi}P_n[\cos\gamma_1]\frac{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\cos m(\varphi-\varphi_2)\partial\varphi_2\right)\right),$$

(für $m=0$ die Hälfte der rechten Seite genommen), convergirt, d. h. ob der Ausdruck auf der rechten Seite ein endlicher ist. Offenbar ist das Integral nach $\partial\varphi_2$ kleiner als $\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n\int_0^{2\pi}\partial\varphi_2$ oder als $2\pi.\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n$, folglich der unter

dem Summationszeichen nach m befindliche Theil kleiner als $E.(2n+1)\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n$, wo E eine endliche Gröfse bezeichnet, folglich, da nur positive Glieder vorkommen:

$$u < e.\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)^2.\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n;$$

wo e wiederum eine endliche Gröfse bezeichnet: also ist u selbst endlich, da sich auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens eine convergente Reihe befindet.

Anmerkung 6.

Um zu zeigen, dafs

$$I_n = \int_0^\pi P_{n,0}[\cos\theta]\sin\theta\,\partial\theta$$

verschwindet, wenn $n>0$, setze man $\cos\theta = x$, wodurch man

$$I_n = \int_{-1}^{+1} P_{n,0}[x]\,\partial x$$

erhält, oder, nach der ersten Anmerkung:

$$I_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(2n)}\int_{-1}^{+1}\frac{\partial^n(x^2-1)^n}{\partial x^n}\,\partial x.$$

Integrirt man unbestimmt, so ist, $n>0$ vorausgesetzt,

$$\int\frac{\partial^n(x^2-1)^n}{\partial x^n}\,\partial x = \frac{\partial^{n-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-1}};$$

welches in Folge der Gleichung (24.) sich nur durch einen Zahlfactor von $(x^2-1)\frac{\partial^{n+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+1}}$ unterscheidet, also für $x=\pm 1$ verschwindet, so dafs wirklich I_n gleich Null wird. Für $n=0$ ist $P_{0,0}[x]=1$, also $I_0 = 2$.

Anmerkung 7.

In dieser Anmerkung wollen wir die *Lamé*schen Betrachtungen mit den hier angestellten vergleichen; nicht nur um zu zeigen, wie die Endresultate, sondern auch wie die Methoden sich zu einander verhalten. Zu einer solchen Vergleichung wäre es überflüssig, die *Lamé*sche Abhandlung über die dreiachsigen Ellipsoïden im Auszuge mitzutheilen. Wir wollen uns bei der beabsichtigten Auseinandersetzung auf die Rotations-Ellipsoïden beschränken, indem das, was aus dem früheren Aufsatze dazu vorausgesetzt wird, hier leicht ergänzt werden kann. Die von *Lamé* an-

gewandten Buchstaben werde ich, so weit es möglich ist, in die im Vorhergehenden gewählten umändern.

Lamé setzt

$$ex = r\rho_1 \cos\varphi, \quad ey = r\rho_1 \sin\varphi, \quad cz = \sqrt{(r^2-e^2)}\sqrt{(e^2-\rho_1^2)},$$

entsprechend den Gleichungen (3.), wo r dieselbe Gröfse wie in §. 1. bezeichnet, und ρ_1 gleich unserem $e\sin\theta$ ist. Durch diese Werthe transformirt er die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ in eine andere, welcher er wiederum durch einige Substitutionen eine höchst elegante, nach r und ρ_1 symmetrische Form giebt. Um nun den Werth von u wirklich zu finden, vergleicht *Lamé* die Aufgabe für das Ellipsoïd mit der für die Kugel, oder, was dasselbe ist, er wendet die Functionen X_n an, wie sie durch (5.) bestimmt werden, kann aber (6.) nicht unmittelbar benutzen, sondern zieht nur den Schlufs für den Werth von $u=\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} X_n$:

$$u = \sum_{m=0}^{m=\infty}\Big((a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)\sum_{n=0}^{n=m} B_{n,m} E_{n,m}\Big).$$

Hier sind a_m und b_m Constanten, d. h. von r, ρ_1 und φ unabhängige Zahlwerthe; $B_{n,m}$ ist eine Function von r, $E_{n,m}$ ein ganzes rationales Polynom $n$ten Grades von ρ_1 und $\sqrt{(e^2-\rho_1^2)}$, dessen Form sich leicht erkennen läfst. Für $B_{n,m}$ und $E_{n,m}$ erhält man Differentialgleichungen, die aus (9.) entstehen, wenn man darin $n(n+1)$ mit A_n vertauscht, für ρ aber erst $\frac{r}{e}$, dann $\frac{\rho_1}{e}$ setzt. Erwägt man nun, dafs $E_{n,m}$ ein Polynom $n$ten Grades von ρ_1 und $\sqrt{(e^2-\rho_1^2)}$ ist, so findet sich, dafs in der That für A_n das Product $n(n+1)$ gesetzt werden kann, so dafs $E_{n,m}$ und $B_{n,m}$ durch Gleichungen wie unsere $P_{n,m}$ bestimmt werden. *Lamé* löset diese Gleichungen durch Reihen auf, von denen (Anmerkung 3.) gezeigt ist, dafs sie sich nur durch einen constanten Factor c von $P_{n,m}$ unterscheiden, so dafs

$$u = \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=m}^{n=\infty}((\alpha_{n,m}\cos m\varphi+\beta_{n,m}\sin m\varphi)P_{n,m}[\cos\theta].P_{n,m}[\sqrt{(1-\rho^2)}]).$$

Um $\alpha_{n,m}$ und $\beta_{n,m}$ zu bestimmen, bedient sich *Lamé* einer Methode, die der ähnlich ist, welche *Poisson* angewandt hat, um zu zeigen, dafs gewisse transcendente Gleichungen, auf die man bei mehreren Fragen der Wärmetheorie kommt (z. B. bei den Untersuchungen über den von der Zeit abhängigen Wärmezustand eines Körpers, der mit einem Gas in Berührung ist), reelle Wurzeln haben. Ebenso einfach, wie es oben geschah, auf die Be-

dingung an der Oberfläche zurückzugehen, ist *Lamé* dadurch verhindert, dafs er sogleich das ganze u, d. h. $\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$ betrachtet, nicht aber die einzelnen X_n, und gleich von Anfang an alle Glieder, die mit einem bestimmten Cosinus oder Sinus z. B. $\cos m\varphi$ multiplicirt sind, zusammenfafst; zu welchem Aggregat jedes X_n, von X_m an, ein Glied beitragen wird.

Zur gröfseren Bequemlichkeit unterscheidet *Lamé* die zu bestimmenden constanten Coëfficienten $\alpha_{n,m}$ und $\beta_{n,m}$ nach acht verschiedenen Gruppen der Glieder, welche sie multipliciren, je nachdem in diesen *Cosinus* oder *Sinus* von *geraden* oder *ungeraden* Vielfachen von φ, ferner $\sqrt{(r^2-e^2)}\sqrt{(e^2-\varrho_1^2)}$ nur in *geraden* oder in *ungeraden* Potenzen vorkommt. Die hierdurch entstehenden acht partiellen Wärmezustände bilden vereint den fraglichen. Einen derselben behandelt *Lamé* vollständig, nämlich den, bei welchem nur Cosinus der geraden Vielfachen von φ, und aufserdem nur gerade Potenzen von $\sqrt{(r^2-e^2)}\sqrt{(e^2-\varrho_1^2)}$ vorkommen, und welchem eine Function $f(\varrho_1, \varphi)$ als Ausdruck der Temperatur an der Oberfläche entspricht, die nur von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ willkürlich ist, für die anderen Werthe aber, von $\varphi=0$ bis $\varphi=-\frac{1}{2}\pi$, von $\frac{1}{2}\pi$ bis π, von $-\pi$ bis $-\frac{1}{2}\pi$, sich periodisch wiederholt. Auf das Endresultat, welches für diesen partiellen Zustand gefunden wird, bezieht sich der Nachweis der Uebereinstimmung, der hier geführt werden soll, indem sich genau zeigen läfst, welchem Theile von (15.) die *Lamé*sche Formel für das u dieses partiellen Zustandes (u_0) gleich ist.

Lamé findet (wenn wir das E sogleich mit dem bequemeren P vertauschen):

$$u_0 = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty}\Big\{\cos 2m\varphi \sum_{n=m}^{n=\infty}\Big(\frac{P_{2n,2m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{2n,2m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}\cdot P_{2n,2m}[\cos\theta]$$
$$\times\frac{\int_0^\pi P_{2n,2m}[\cos\theta]\sin\theta\,\partial\theta\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\varrho_1,\varphi)\cos 2m\varphi\,\partial\varphi}{\int_0^\pi (P_{n,m}[\cos\theta])^2\sin\theta\,\partial\theta}\Big)\Big\},$$

(für $m=0$ die Hälfte der rechten Seite genommen). Für $f(\varrho_1, \varphi)$ kann man $f(e\sin\theta, \varphi)$ setzen, oder auch $f(\theta, \varphi)$, wo jetzt f eine andere Function als früher bezeichnet. Ferner wird das Vierfache des Integrals zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ wegen der Symmetrie der Function $f(\theta, \varphi)$ nach φ, die auch bei der Umänderung, welche die Bedeutung des Buchstaben f erfahren hat, nicht verloren gegangen sein kann, zu dem Einfachen desselben Integrals, wenn man die Integration von 0 bis 2π ausdehnt. Kehrt man dann die Reihen-

folge der Summationen auf die bekannte Art um, so ist

$$u = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=n}\Bigg(\cos 2m\varphi\,\frac{P_{2n,2m}[\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{2n,2m}[\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]}.P_{2n,2m}[\cos\theta] \times \frac{\int_0^\pi P_{2n,2m}[\cos\theta]\sin\theta\,\partial\theta\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\cos 2m\varphi\,\partial\varphi}{\int_0^\pi (P_{2n,2m}[\cos\theta])^2\sin\theta\,\partial\theta}\Bigg),$$

(wiederum für $m=0$ die Hälfte genommen): eine Formel, die mit dem Theile von (15.), in welchem nur die geraden n und m summirt werden, und nur die Cosinus, nicht die Sinus der Vielfachen des Winkels φ vorkommen, bis auf die Constanten übereinstimmt. Will man auch die Gleichheit dieser nachweisen, so muſs man zeigen, daſs

$$47.\qquad \frac{4n+1}{4}.a_{2n,2m} = \frac{1}{\int_0^\pi (P_{2n,2m}[\cos\theta])^2\sin\theta\,\partial\theta}$$

ist (für $m=0$ die Hälfte der rechten Seite genommen); welches sich auch aus den bekannten Eigenschaften der P leicht wird nachweisen lassen.

In der That ist

$$\int_{-1}^{+1}(P_n[x])^2\partial x = \frac{2}{2n+1},\ \text{also}$$

$$\int_{-1}^{+1}(P_{n,0}[x])^2\partial x = \frac{2}{(2n+1)}.\frac{(1.2.3\ldots.n)^2}{(1.3.5\ldots.(2n+1))^2} = \frac{2}{(2n+1)}.\frac{1}{a_{n,0}},$$

so daſs die Gleichung (47.) für $m=0$ bewiesen ist. Um auch die anderen Fälle zu umfassen, betrachte ich

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}}.\frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}}\partial x,$$

welches nach der Integration durch Theile in das Integral

$$-\int_{-1}^{+1}\frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}}.\frac{\partial^{n+m+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m+1}}\partial x$$

übergeht. Es ist nämlich

$$\int\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}}.\frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}} = \frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}}.\frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}} - \int\frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}}.\frac{\partial^{n+m+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m+1}}\partial x.$$

Für $x=\pm1$ verschwindet aber der auſserhalb des Integralzeichens befindliche Theil, da nach (24.)

$$\frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}} = \frac{(x^2-1)^{m+1}}{(n+m+1)!}.(n-m-1)!\,\frac{\partial^{n+m+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m+1}}.$$

Zugleich ist auch nach (25.) und (25.*)

$$(P_{n,m}[x])^2 =$$
$$\frac{(-1)^m}{((n-m+1)(n-m+2)\dots(2n))((n+m+1)(n+m+2)\dots(2n))}\cdot\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}}\cdot\frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}},$$

also, zufolge der so eben bewiesenen Beziehung,

$$\int_{-1}^{+1}(P_{n,m}[x])^2\,\partial x =$$
$$\frac{(-1)^{m+1}}{((n-m+1)(n-m+2)\dots(2n))((n+m+1)(n+m+2)\dots(2n))}\int_{-1}^{+1}\frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}}\cdot$$
$$\times\frac{\partial^{n+m+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m+1}}\cdot\partial x$$
$$=\frac{(n-m)}{(n+m+1)}\cdot\int_{-1}^{+1}(P_{n,m+1}[x])^2\,\partial x;$$

woraus man endlich, mit Benutzung des Werthes von $\int_{-1}^{+1}(P_{n,0}[x])^2\,\partial x$,

$$\int_{-1}^{+1}(P_{n,m}[x])^2\,\partial x = \frac{(n+m)(n+m-1)\dots(n+1)}{(n-m+1)(n-m+2)\dots n}\cdot\frac{2}{(2n+1)} = \frac{4}{(2n+1)}\cdot\frac{1}{a_{n,m}}$$

zieht; womit ein Satz bewiesen ist, der die Gleichung (47.) als speciellen Fall in sich begreift.

16.

Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Hrn. Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Br.)

I.

§. 1.

Das Wort „wahrscheinlich" wird im gewöhnlichen Leben von solchen Dingen gebraucht, deren Thatbestand, er mag der Vergangenheit oder der Zukunft, der sinnlichen oder der geistigen Anschauung angehören, nicht als wahr oder gewifs angesehen und deswegen für unbezweifelt gehalten wird, aber doch viele, oder gar die meisten Gründe für sich hat. Man stellt den Begriff des Wahrscheinlichen dem der Wahrheit, Wirklichkeit, Gewifsheit u. s. w. (verschiedenen Modificationen einer und derselben Grundbedeutung) gegenüber, und dem des Unwahrscheinlichen zur Seite, und gebraucht letztern, wenn nur wenige Gründe für den Thatbestand einer Sache sprechen, ihre Möglichkeit aber nicht bezweifelt werden kann.

Der Schlufs auf den Thatbestand einer Sache, oder das Eintreffen eines Ereignisses, hängt, wie leicht zu sehen, von der Kenntnifs der einwirkenden Ursachen, Umstände und Bedingungen einerseits, und andrerseits von dem Grade der Bildung, Einsicht und Urtheilskraft der schliefsenden Personen ab. Die äufsere Bedingung für den Begriff des Wahrscheinlichen ist, dafs der Gegenstand selbst keinen Widerspruch in sich trage, noch in einem solchen mit irgend einer anerkannten Wahrheit stehe. Eine und dieselbe Sache kann demnach für verschiedene Personen und unter verschiedenen Umständen verschiedene Grade der Wahrscheinlichkeit haben. Sind nun alle Ursachen, welche für das Dasein eines Dinges oder Ereignisses sprechen, und eben so auch alle, welche dagegen sprechen, genau bekannt, so kann man auch alle begünstigenden und alle hindernden Umstände zählen, unter einander vergleichen, den Grad der Wahrscheinlichkeit genau bestimmen, und ihn daher durch den Calcul darstellen. Dies ist die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu dem Ende hat man den besondern Ausdruck „mathematische Wahrscheinlichkeit" eingeführt, und versteht darunter das

Verhältnifs derjenigen Umstände, Ursachen oder Fälle, wodurch der Thatbestand einer Sache oder das Eintreffen eines Ereignisses bedingt ist, zu der Gesammtzahl aller möglichen Umstände, Ursachen oder Fälle, die mit ihm in Beziehung stehen und auf eine günstige oder hindernde Art einwirken können.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit kann demnach alle Stufen, von der Grenze der Unmöglichkeit, bis zu der der Gewifsheit, durchlaufen. Sie wird um so gröfser sein, je gröfser die Anzahl der begünstigenden Ursachen oder Umstände im Verhältnifs zur Gesammtzahl ist: sie wird um so kleiner sein, je geringer die Zahl der günstigen und je gröfser die der hindernden oder ungünstigen Ursachen oder Umstände im Verhältnifs zur Zahl aller möglichen Ursachen oder Umstände ist, die auf das Eintreffen eines Ereignisses einwirken.

§. 2.

Die Bemerkungen des vorigen Paragraph rechtfertigen folgende Grundsätze.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit wird durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler die dem Thatbestande einer Sache oder dem Eintreffen eines Ereignisses günstigen Fälle, der Nenner *alle möglichen*, auf den Thatbestand oder zu dem Eintreffen in Beziehung stehenden Fälle zählt.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit durch w, die Zahl der günstigen Fälle durch p, die aller möglichen durch q, so ist

1. $w = \frac{p}{q}$.

Hieran schliefst sich unmittelbar Folgendes.

2. Die Wahrscheinlichkeit ist ein echter Bruch; denn der Zähler mufs immer kleiner als der Nenner sein.

3. Die Gewifsheit ist der Einheit gleich, oder

4. $g = \frac{q}{q} = 1$,

wenn g die Gewifsheit bezeichnet. Sie tritt nämlich ein, wenn alle auf den Thatbestand einer Sache oder auf das Eintreffen eines Ereignisses Bezug habenden Elemente als günstig einwirkend zu betrachten sind.

Der Wahrscheinlichkeit, welche für das Bestehen einer Sache oder das Eintreffen eines Ereignisses spricht, steht derjenigen, welche für das

Gegentheil spricht, entgegen. Man nennt sie deshalb auch „entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit." Sie begreift die Zahl aller ungünstigen Fälle in sich, ergänzt daher die günstigen Fälle zur Zahl aller möglichen, und bringt mit der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit (Nro. 1.) die Gewifsheit hervor.

Beide Begriffe schliefsen einander aus. Dies giebt

$$s, \quad u = 1 - w = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}.$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist demnach ebenfalls ein echter Bruch, dessen Zähler die Anzahl der ungünstigen, der Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ausdrückt.

Kommt die Wahrscheinlichkeit einer einzigen Begebenheit oder des Bestehens nur einer Sache in Frage, und wird diese für sich allein und nicht in Verbindung oder Beziehung zu einer andern betrachtet, so nennt man sie „einfache Wahrscheinlichkeit." Schliefst die Wahrscheinlichkeit aber das Zusammentreffen mehrerer Begebenheiten oder das Zusammenbestehen mehrerer Dinge in sich, so heifst sie „zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit."

Wir unterscheiden zwei besondere Fälle dieser Wahrscheinlichkeit.

a) Entweder begreift das Bestehen einer Sache oder das Eintreffen eines Ereignisses mehrere Fälle in sich, von denen jeder ein günstiges Moment für die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit abgiebt, die sich aber gegenseitig so ausschliefsen, dafs nur einer von den fraglichen Fällen eintreffen kann:

b) Oder es begreift mehrere Fälle in sich, die zusammenwirken und dabei so von einander abhängen, dafs kein einziger Fall unerfüllt bleiben darf, wenn nicht die vorliegende Frage in ihrem Wesen geändert werden soll.

Die unter *a.* bezeichnete Wahrscheinlichkeit soll „relative Wahrscheinlichkeit" heifsen; wie dieser Name auch vorkommt, ob er gleich nicht ganz passend scheint; die unter *b.* bezeichnete wollen wir „bedingte oder abhängige Wahrscheinlichkeit" nennen.

Der hier bezeichnete Unterschied tritt besonders deutlich bei der Anwendung auf besondere Fälle hervor.

Sind in einer Urne 8 weifse, 10 rothe und 12 schwarze Kugeln enthalten, und wird einmal gezogen, und fragt man: wie grofs ist die Wahr-

scheinlichkeit, dafs entweder eine weifse oder eine schwarze Kugel erscheinen werde? so ist klar, dafs die Beantwortung der Frage auf dem Eintreffen des einen oder des andern Falles beruht. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine weifse Kugel erscheinen werde, ist $\frac{8}{30}$, dafs eine schwarze erscheinen werde, $\frac{12}{30}$. Jeder von beiden Fällen begünstigt das Eintreffen des Ereignisses. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der eine oder der andere Fall eintreffen werde, ist demnach

$$w = \tfrac{8}{30} + \tfrac{12}{30} = \tfrac{20}{30} = \tfrac{2}{3}.$$

Sind die Bedingungen wie vorhin, wird zweimal gezogen und die gezogene Kugel nach der Ziehung zurückgeworfen, und fragt man: wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs zuerst eine weifse und dann eine schwarze Kugel erscheinen werde, so ist die hier in Frage stehende Wahrscheinlichkeit die bedingte oder abhängige; denn beide Fälle, das Erscheinen einer weifsen und einer schwarzen Kugel, müssen eintreten, wenn das Eintreffen des Ereignisses statthaben soll. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine weifse Kugel erscheinen werde, ist wie vorhin $\frac{8}{30}$, dafs eine schwarze erscheinen werde $\frac{12}{30}$, weil die in der ersten Ziehung gezogene Kugel in die Urne zurückgeworfen wird, ehe die zweite Ziehung geschieht. Da nun das Erscheinen der weifsen Kugel dem der schwarzen vorangehen mufs, so wird das Eintreffen des zweiten Ereignisses durch das des ersten bedingt sein, und also unter 30 möglichen Fällen nur 8 mal vorkommen. Das Eintreffen des Ereignisses ist von dem Zutreffen der beiden genannten abhängig, und die Wahrscheinlichkeit, das es geschehen werde, ist

$$w = \tfrac{8}{30} \cdot \tfrac{12}{30} = \tfrac{8}{75}.$$

Der unter *a.* und *b.* bezeichnete Unterschied tritt deutlich hervor und führt zu ganz verschiedenen Resultaten. Im ersten Fall tritt die Summe, im zweiten das Product der einfachen Wahrscheinlichkeiten hervor.

Zuweilen ist die Wahrscheinlichkeit in doppelter Beziehung zusammengesetzt; wie sich an folgendem Falle zeigen wird.

Die Bedingungen sind die obigen. Es wird zweimal aus der Urne gezogen und die gezogene Kugel wird nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine weifse und dafs eine schwarze Kugel erscheinen werde?

Hier können zwei günstige Fälle eintreten. Entweder erscheint zuerst eine weifse und dann eine schwarze, oder zuerst eine schwarze und dann eine weifse Kugel. Der erste Fall wurde eben erörtert. Die Wahr-

scheinlichkeit dafür ist

$$w_1 = \tfrac{8}{30} \cdot \tfrac{12}{30} = \tfrac{8}{75},$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs zuerst eine schwarze und dann eine weifse Kugel erscheinen werde, setzt die umgekehrte Ordnung voraus und ist aus den vorhin angegebenen Gründen

$$w_2 = \tfrac{12}{30} \cdot \tfrac{8}{30} = \tfrac{8}{75}.$$

Beide Fälle sind dem Eintreffen des Ereignisses günstig, schliefsen sich aber gegenseitig aus. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$w = \tfrac{8}{30} \cdot \tfrac{12}{30} + \tfrac{12}{30} \cdot \tfrac{8}{30} = \tfrac{16}{75}.$$

In dem vorliegenden Falle tritt die bedingte und die relative Wahrscheinlichkeit zusammen ein. Es giebt, wie leicht ersichtlich ist, noch zusammengesetztere Fälle. Ihre Untersuchung wird den in *a.* und *b.* ausgedrückten Unterschied bestätigen. Zugleich ergiebt sich ein allgemeines Gesetz, welches gilt, wenn auch mehr als zwei Ereignisse in Frage kommen, und welches sich auf folgende Weise darstellt.

Werden die Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen verschiedener, sich ausschliefsender Ereignisse begünstigen, durch $\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \frac{p_3}{q}, \ldots \frac{p_n}{q}$ ausgedrückt, so ist die hieraus sich ergebende relative Wahrscheinlichkeit

$$6. \quad w = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots p_n}{q}.$$

Hierin kann $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots p_n$ entweder kleiner, oder höchstens so grofs als q sein.

Werden die Wahrscheinlichkeiten, von denen das Eintreffen eines zusammengesetzten Ereignisses abhängt, $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots \frac{p_n}{q^n}$ genannt, so ist die bedingte oder abhängige Wahrscheinlichkeit

$$7. \quad w = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3}, \ldots \frac{p_n}{q_n}.$$

Es zeigt sich aus (6.), dafs die relative Wahrscheinlichkeit durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fälle, aus (7.), dafs die bedingte durch das Product derselben ausgedrückt wird. Sind die Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen der einzelnen Fälle bestimmen, einander gleich, so geht die relative Wahrscheinlichkeit in ein Product und die bedingte in eine Potenz über. Dies tritt bei Wiederholungen ein.

Erwägt man nun, dafs die Gleichung (6.), aus Gründen, welche die Elementar-Mathematik lehrt, immer das nämliche Resultat liefert, in welcher *Ordnung* auch die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zusammengezählt

werden, und dafs die Gleichung (7.) das nämliche Resultat liefert, in welcher *Ordnung* auch die einzelnen Factoren vervielfacht werden, und trägt diese Erwägung auf die Bedeutung der Gleichungen über, so ergiebt sich folgender Grundsatz:

8. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, in welchem mehrere Fälle in einer bestimmten Ordnung aufeinander folgen, bleibt unverändert, wenn auch die Ordnung in der Reihenfolge der einzelnen Fälle geändert, oder wenn an die Stelle einer bestimmten Reihenfolge eine andere bestimmte Reihenfolge unter den in Frage stehenden Fällen gesetzt wird. Demnach ist die Ordnung, in welcher die einzelnen Fälle eines zusammengesetzten Ereignisses aufeinander folgen, bei Bestimmung der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit ganz gleichgültig.

Die Gleichung (7.) läfst noch eine andere und folgende Betrachtungsart zu.

Es sind n Urnen vorhanden, von denen die erste q_1, die zweite q_2, die dritte q_3, u. s. w., die $n$te q_n Kugeln enthält. In der ersten Urne befinden sich p_1 Kugeln einer bestimmten Art, in der zweiten p_2 Kugeln einer zweiten, in der dritten p_3 Kugeln einer dritten Art, u. s. w., in der $n$ten p_n Kugeln einer $n$ten Art. Man zieht aus jeder Urne gleichzeitig eine Kugel. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus jeder Urne eine Kugel von der bezeichneten Art werde gezogen werden?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit findet sich, wenn man zuerst das gleichzeitige Erscheinen der Kugeln von den bestimmten Arten aus den beiden ersten Urnen miteinander in Verbindung bringt, mit diesem das Erscheinen einer der bestimmten Kugeln aus der dritten Urne u. s. f., und endlich bis zu dem Erscheinen einer Kugel der bestimmten Art aus der letzten Urne aufsteigt. Die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen der einzelnen Kugeln aus den einzelnen Urnen sind $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \dots \frac{p_n}{q_n}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \cdot \frac{p_4}{q_4} \dots \frac{p_n}{q_n}.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit (7.) führt zu folgendem Satze.

9. Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit ist es gleichgültig, ob das Eintreffen der einzelnen Ereignisse gleichzeitig, oder in der Zeit nach einander geschieht.

Leicht läfst sich ferner nachweisen, dafs auch bei dem gleichzeitigen Eintreffen der einzelnen Ereignisse die Ordnung gleichgültig ist.

Betrachtet man endlich die Zahl der Fälle, welche das Eintreffen eines Ereignisses begünstigen, als die dieses Ereignifs hervorrufende Ursache (wie sich dies durch die Sache selbst rechtfertigt), so giebt dies Gelegenheit, die Ursachen mit der durch sie bedingten Wahrscheinlichkeit zu vergleichen. Bezeichnen wir die Ursachen, welche das Eintreffen zweier Ereignisse bedingen, durch u_1, u_2 und die durch sie bedingten Wahrscheinlichkeiten durch w_1, w_2, so ergiebt sich

$$10. \quad u_1 : u_1 = w_1 : w_2.$$

Die Wahrscheinlichkeiten, welche dem Eintreffen der Ereignisse zugehören, stehen zu einander in demselben Verhältnisse, wie die Ursachen, auf welchen das Eintreffen der Ereignisse beruht; und umgekehrt.

11. Die Ursachen, welche für das Eintreffen der Ereignisse sprechen, stehen in demselben Verhältnisse, wie das Eintreffen der durch sie herbeigeführten Erscheinungen, oder wie die letztern zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Der Satz (11.) ist der umgekehrte von (10.). Beide bezeichnen den Zusammenhang zwischen Ursache und Erscheinung, welchen zu kennen wichtig ist, da er den Weg zum Auffinden neuer Erkenntnisse zeigt.

§. 3.

Die in dem vorhergehenden Paragraph aufgestellten Sätze bilden nach unserer Ansicht die Grundgesetze, worauf die Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht, und die ganze Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit der Anwendung dieser Gesetze auf einzelne Fälle.

Die aufgestellten Gesetze sind sehr einfach; aber ihre Anwendung und die Behandlung der einzelnen Fälle findet oft viele Schwierigkeiten.

Das Gebäude der Wahrscheinlichkeit beruht, wie §. 2. zeigt, auf der Ermittlung der einfachen Wahrscheinlichkeit. Aus ihr wird die zusammengesetzte sofort abgeleitet. Gerade aber die Bestimmung der einfachen Wahrscheinlichkeit ist oft einer der schwierigsten Puncte und nimmt die Aufmerksamkeit in hohem Grade in Anspruch.

Ueber die Art und Weise, wie die Wahrscheinlichkeit des einzelnen Falles aufgefunden oder bestimmt werden kann, lassen sich, wie leicht zu sehen, keine Regeln oder Gesetze aufstellen. Unter allen Mitteln,

welche zur Auflösung eines Problems dienen können, ist das einfachste das beste; und es soll in den folgenden Untersuchungen hierauf besonders Rücksicht genommen und das Zurückgreifen auf künstliche oder entfernt liegende Mittel so viel als möglich vermieden werden; denn je einfacher die Entwicklungen sind, desto mehr dürften sie die Ausbildung einer Wissenschaft fördern.

Bei Bestimmung der einfachen Wahrscheinlichkeit ist nach 1. §. 2. das Verhältnifs zwischen der Zahl derjenigen Fälle, welche dem Eintreffen einer Begebenheit günstig sind, und der Zahl aller möglichen mit dem Eintreffen eines Ereignisses in Verbindung stehenden Fälle zu ermitteln. Dabei wird immer vorausgesetzt, dafs alle die einwirkenden Fälle *gleich* möglich sind. Sind sie nicht *gleich* möglich, so mufs der verschiedene Grad der Möglichkeit bestimmt werden; was oft sehr schwierig, oft aus mangelhafter Kenntnifs der Umstände unausführbar, in manchen Fällen aber unwichtig und undankbar ist. Deshalb wird im Folgenden hierauf in der Regel nicht Rücksicht genommen werden.

Was nun die im vorigen Paragraph aufgestellten Grundsätze betrifft, so dürften sie als die hervortreten, denen der Character der Allgemeinheit zukommt, und die daher geeignet sind, die Grundlage einer Wissenschaft zu bilden.

Laplace hat in seinem „*Essai philosophique sur les probabilités*", die er als Einleitung zur 3ten Auflage seiner „*Théorie analytique des probabilités*" vorausschickte, zehn Grundsätze aufgestellt, die er als Grundlage dieser Theorie betrachtet, die aber nicht alle mit den hier aufgestellten zusammenfallen und die nach unserer Ansicht nicht die erforderliche, eben bezeichnete Eigenschaft zu haben scheinen *).

---

*) Die von *Laplace* aufgestellten Grundsätze lauten wie folgt:

Ier Principe.

Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport du nombre des cas favorables, à celui de tous les cas possibles.

IIe Principe.

Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable.

IIIe Principe.

Si les évènemens sont indépendans les uns des autres; la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières.

aufgestellte Grundsatz fällt mit dem in 1. §. 2.
mmen.

tze mangelt eine genaue Erörterung und Fixi-
rkungen, welche den Satz eröffnen, sind Re-
bei Bearbeitung der Wissenschaft, dienen
keit, und gehören offenbar einem Grundsatze
merkungen entfernt, so schliefst sich der Inhalt
an den des ersten Grundsatzes an, dafs noch

qu'un évènement simple dans les mêmes circonstances,
de fois, est égale à la probabilité de cet évènement
indiquée par ce nombre.

IVe Principe.

dependent l'un de l'autre, la probabilité de l'évène-
la probabilité du premier évènement, par la probabi-
rivé, l'autre arrivera.

Ve Principe.

la probabilité de l'évènement arrivé, et la probabilité
lui ci et d'un autre, qu'on attend; la seconde proba-
la probabilité de l'évènement attendu, tirée de l'évè-

VIe Principe.

quelles un évènement observé peut être attribué, est
raisemblance, qu'il est plus probable que cette cause
aura lieu; la probabilité de l'existence d'une quel-
une fraction dont le numérateur est la probabilité de
cause, et dont le dénominateur est la somme des pro-
toutes les causes; si ces diverses causes considerées à
il faut au lieu de la probabilité de l'évènement, re-
le produit de cette probabilité, par celle de la cause

VIIe Principe.

est la somme des produits de la probabi-
observé, par la probabilité que cette cause

VIIIe Principe.

matique) dépend des plusieurs évènemens;
its de la probabilité de chaque évènement,

ncipe.

, dont les uns produisent un bien, et les
resulte, en faisant une somme des pro-
favorable, par le bien qu'il procure et en
de la probabilité de chaque évènement
Si la seconde somme l'emporte sur la
ance se change en crainte.

pe.

nt petite, est égale à sa valeur absolue,
sée.

ein weiteres Criterium zur Unterscheidung angegeben sein sollte. Da aber eine Wiederholung nicht in der Absicht des Verfassers liegen konnte, so läfst sich der Inhalt des letzten Satzes, worin der Grundsatz ausgesprochen ist, nur mit dem in 6. §. 2. angegebenen zusammenstellen, wenn er anders Bedeutung haben soll. *Laplace* hat aber die Erörterungen und Unterscheidungen, auf welchen der in 6. §. 2. aufgestellte Grundsatz beruht, nicht gegeben, ob sie gleich nicht hätten umgangen werden sollen.

Unter Nr. III. und IV. hat *Laplace* zwei Grundsätze aufgestellt, die sich bei näherer Untersuchung offenbar als identisch zeigen, und deswegen auch in einen Grundsatz zusammenfallen müssen. Die bedingte Wahrscheinlichkeit characterisirt sich nämlich auf zwei verschiedene Arten. Entweder liegt der Zusammenhang, worin zwei oder mehrere Ereignisse zu einander stehen, in ihnen selbst, und tritt ganz deutlich schon in ihrer Ankündigung hervor: oder er liegt in unserer Denkweise und in der Art, wie wir die Ereignisse auf einander beziehen, während diese selbst von einander unabhängig zu sein scheinen. Im letzten Fall findet aber immer Zusammenhang statt, und mufs stattfinden, wenn nicht ein Widerspruch entstehen soll. Denn es wäre nicht wohl denkbar, dafs Ereignisse, die unabhängig von einander sind, durch Rechnung in einen Zusammenhang gebracht werden könnten.

Dies wird durch Folgendes deutlicher hervortreten. A hat eine Urne, in welcher n mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln, B eine, in welcher m mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnete Kugeln enthalten sind. Nun setzen wir folgende Fälle:

a. A zieht aus seiner Urne zuerst eine Kugel; dann B eine aus der seinigen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs A die mit 1 bezeichnete Kugel und B die mit derselben Zahl bezeichnete Kugel ziehen werde?

b. A und B ziehen gleichzeitig eine Kugel aus beiden Urnen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die beiden gezogenen Kugeln die Zahl 1 haben werden?

c. A und B ziehen je eine Kugel. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine von den zwei gezogenen Kugeln die Zahl 1 trage?

d. A zieht eine Kugel. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die Zahl 1 trage? B zieht eine. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die Zahl 1 trage?

In dem Falle *a.* ist der Zusammenhang, worin beide Ereignisse stehen, deutlich angekündigt. In *b.* ist dieser Zusammenhang durch die Betrachtungsweise eingeführt. Dasselbe gilt von *c.* In *d.* findet kein Zusammenhang statt. Beide Ereignisse sind unabhängig von einander, stehen vereinzelt, sind auch nicht durch unsere Denkweise in irgend einen Zusammenhang gebracht. Der Calcul kann also auch keinen hineinlegen. In *a.* und *b.* kommt die bedingte Wahrscheinlichkeit in Betrachtung, in *c.* die bedingte und relative.

Dafs nun *Laplace* den dritten Grundsatz dadurch verallgemeinert, dafs er sagt: „Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine einfache Begebenheit unter den nämlichen Verhältnissen mehreremal nach einander eintrete, ist gleich der Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses, erhoben in die Potenz, welche durch die Anzahl der Wiederholungen bestimmt wird," können wir nicht billigen; denn dieser Begriff ist enger als der ihm vorhergehende, und keineswegs allgemeiner: gerade so wie der Begriff von Potenz ein besonderer Fall des Begriffes von Product ist. Aus dem in 7. §. 2. aufgestellten Satze folgt von selbst, dafs die bedingte Wahrscheinlichkeit in eine Potenz übergeht, wenn das wiederholte Eintreffen eines und desselben Ereignisses in Frage steht.

Jeder von den übrigen Grundsätzen, die *Laplace* aufgestellt hat, der 5te, 6te, 7te, 8te, 9te und 10te gehören besonderen Zweigen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, und kommen nur dort zum Vorschein. Sie lassen sich alle aus dem Begriffe der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit ableiten und sind in der That nichts anderes, als die Anwendung der in §. 2. aufgestellten Sätze auf besondere Fälle; wie sich dies an dem gehörigen Orte deutlich zeigen wird. Sie betreffen z. B. die Erschliefsung der Ursachen aus den Wirkungen, des Eintreffens künftiger Ereignisse aus vorhergegangenen Erscheinungen, die Bestimmung des Werthes der Hoffnung, des eines zu erwartenden Gutes u. s. w. und tragen deshalb unverkennbar den Character der Specialität an sich. Dies ist der Grund, warum sie hier nicht als allgemeine Grundsätze aufgeführt sind.

Der 10te Grundsatz ist ein Satz, welcher der Lehre von dem Werthe der subjectiven Hoffnung angehört und von *Dan. Bernoulli (Specimen theoriae novae de mensura sortis in Comment. Academ. scientiarum imperialis Petrop. Tom. V. ad annos 1730 et 1731. pag. 175.)* zuerst aufgestellt wurde.

Poisson ist in seinem Werke „*Recherches sur la probabilité des jugemens en matière criminelle et en matière civile, precédées des règles générales du calcul des probabilités.*" im Wesentlichen den von *Laplace* aufgestellten Grundsätzen gefolgt und hat sie noch um viele vermehrt, oder das Nähere erörtert. Da sie aber nach der hier vorgetragenen Ansicht die oben gemachten Bemerkungen nicht zu entkräften scheinen, so konnte auch hierauf keine Rücksicht genommen werden.

II.

§. 4.

In einer Urne sind verschiedenartige Kugeln enthalten: m_1 Kugeln der ersten, m_2 der zweiten u. s. w., m_r der $r$ten Art. $s$mal wird gezogen. Bei jeder Ziehung wird eine Kugel aus der Urne genommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in den p_1 ersten Ziehungen nur Kugeln der ersten, in den p_2 zweiten Ziehungen nur Kugeln der zweiten Art u. s. w., in den p_r letzten Ziehungen nur Kugeln der letzten Art erscheinen werden?

Durch das Zurückwerfen der gezogenen Kugel in die Urne bleibt die Zahl der Kugeln für jede neue Ziehung dieselbe. Bei Ermittelung der günstigen, so wie aller möglichen Kugelgruppen, die erscheinen können, kommen daher die Versetzungen mit Wiederholungen in Frage. In den p_1 ersten Ziehungen können also Kugeln der ersten Art auf $m_1^{p_1}$, in den p_2 folgenden Ziehungen Kugeln der zweiten Art auf $m_2^{p_2}$fache Weise erscheinen. Die Zahl der günstigen Gruppen ist daher

$$A = m_1^{p_1} . m_2^{p_2} . m_3^{p_3} \dots . m_r^{p_r}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle wird durch die Gruppen-Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus so vielen Elementen als die Kugel-Anzahl angiebt, und zur sovielten Classe bestimmt, als Ziehungen gemacht werden. In Rücksicht auf 19. §. 10. meiner Combinations-Lehre ist hiernach die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1. \quad w = \frac{m_1^{p_1} . m_2^{p_2} . m_3^{p_3} \dots . m_r^{p}}{(m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_r)^{p_1 + p_2 \dots p_r}} .$$

Hierin ist $s = p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_r$.

Die Bedingungen sind, wie oben. Die Ordnung, in welcher die Gruppen der verschiedenen Kugel-Arten nach einander erscheinen sollen, wird aufgehoben; die Zahl aber, wie oft Kugeln von einerlei Art hintereinander erscheinen sollen, wird beibehalten. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit unter dieser Bedingung?

Die Anzahl der günstigen Kugelgruppen wird sich vergröfsern, und zwar sovielmal als die Kugelgruppen, welche den verschiedenen Arten zugehören, unter sich versetzt werden können. Hiernach ist

$$2. \quad w = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots.3.2.1.m_1^{p_1}.m_2^{p_2}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_1+m_2+m_3+m_4\ldots.m_r)^s}.$$

Die Bedingungen sind dieselben, wie oben. Die Wahrscheinlichkeit soll bestimmt werden, dafs in s Ziehungen überhaupt p_1 Kugeln der ersten, p_2 Kugeln der zweiten u. s. w., p_r Kugeln der $r$ten Art erscheinen werden?

In diesem Falle können die einzelnen Kugeln der verschiedenen Arten in jeder beliebigen Stellung untereinander erscheinen. Dies ist in s Ziehungen möglich; wobei jedoch die Beschränkung gilt, dafs je p_1 Kugeln einer Art, je p_2 Kugeln einer zweiten Art u. s. w. zugehören, die in ihrer Beziehung untereinander die gleiche Eigenschaft haben und daher nicht die volle Anzahl Versetzungen, sondern Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen bilden. Die fragliche Wahrscheinlichkeit wird

$$3. \quad w = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots.3.2.1}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}.1^{p_3|1}\ldots.1^{p_r|1}} \cdot \frac{m_1^{p_1}.m_2^{p_2}.m_3^{p_3}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_1+m_2+m_3\ldots.m_r)^s}$$

sein. Hiebei ist $s = p_1+p_2+p_3+\ldots.p_r$. Diese Gleichung hätte sich auch aus dem Begriffe der Zerstreuungen der Elemente mehrerer Reihen in Fächer nach §. 12. meiner Combinationslehre ableiten lassen.

Wählen wir in der Gleichung 1. eine andere Ordnung, in welcher die verschiedenartigen Kugelgruppen erscheinen sollen, und bestimmen die zugehörige Wahrscheinlichkeit, so ergiebt sich leicht

$$4. \quad w = \frac{m_1^{p_1}.m_2^{p_2}.m_3^{p_3}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_1+m_2+m_3+\ldots.m_r)^s} = \frac{m_2^{p_2}.m_1^{p_1}.m_3^{p_3}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_2+m_1+m_3+\ldots.m_r)^s}$$
$$= \frac{m_3^{p_3}.m_1^{p_1}.x_2^{p_2}\ldots.m_r^{p_r}}{(m_3+m_1+m_2+\ldots.m_r)^s}.$$

Hieraus entnehmen wir folgenden Satz:

5. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, in welchem mehrere Fälle in bestimmter Ordnung auf einander folgen, bleibt unverändert, wenn auch die Ordnung, in welcher sich diese Fälle aneinander anschliefsen sollen,

geändert, oder wenn eine bestimmte Reihenfolge in diesen Fällen durch eine andere beliebige bestimmte Reihenfolge vertreten wird.

In einer Urne sind r Kugel-Arten enthalten. Die erste zählt m_1, die zweite m_2, die dritte m_3 u. s. w., die $r$te m_r Kugeln. $s$mal wird gezogen und jedesmal eine Kugel herausgenommen, die nach der Ziehung nicht in die Urne zurückgeworfen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in den p_1 ersten Ziehungen nur Kugeln der ersten, in den p_2 folgenden nur Kugeln der zweiten u. s. w., in den p_r letzten Ziehungen nur Kugeln der letzten Art erscheinen werden?

Da die gezogene Kugel nicht wieder in die Urne geworfen wird, so können hier keine Kugeln wiederholt erscheinen und es kommen daher bei Ermittlung der günstigen, so wie aller möglichen Kugelgruppen, die Versetzungen ohne Wiederholungen in Betrachtung. In den p_1 ersten Ziehungen können daher nur Kugeln der ersten Art auf $m_1^{p_1|-1}$, in den p_2 folgenden nur Kugeln der zweiten Art auf $m_2^{p_2|-1}$fache Weise erscheinen u. s. w. In s hintereinander folgenden Ziehungen können aber Kugeln aus allen möglichen Arten auf $(m_1+m_2+m_3+\dots m_r)^{s|-1}$fache Weise (14. §. 8. pag. 10 m. Comb. Lehre) erscheinen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$6.\quad w=\frac{m_1^{p_1|-1}.m_2^{p_2|-1}.m_3^{p_3|-1}+\dots m_r^{p_r|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\dots m_r)^{s|-1}}.$$

Hierin ist $p_1+p_2+p_3+\dots+p_r=s$.

Für jede andere beliebige, aber bestimmte Reihenfolge im Erscheinen der verschiedenartigen Kugelgruppen bleibt die vorstehende Gleichung, also auch die Wahrscheinlichkeit, dafs das in Frage stehende Ereignifs eintreffen werde, ungeändert, und wir begegnen auch hier dem in (5.) angegebenen Satze. Ist aber die Ordnung, in welcher die Gruppen der verschiedenen Kugel-Arten erscheinen sollen, nicht eine bestimmte, sondern gleichgültig, so kommen auch hier die Schlüsse, welche zur Gleichung (2.) gemacht wurden, in Anwendung, und die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den vorher angegebenen Bedingungen r verschiedenartige Kugelgruppen, und von jeder Art eine bestimmte Anzahl hinter einander erscheinen werden, ist

$$7.\quad w=\frac{r^{r|-1}m_1^{p_1|-1}.m_2^{p_2|-1}.m_3^{p_3|-1}\dots m_r^{p_r|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\dots m_r)^{p_1+p_2+\dots p_r|-1}}.$$

§. 5.

In einer Urne befinden sich zweierlei Kugeln: m_1 Kugeln von der ersten und m_2 von der zweiten Art. Man nimmt (p_1+p_2) Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln in die Urne zurückzuwerfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs überhaupt p_1 Kugeln der ersten und p_2 Kugeln der zweiten Art erscheinen werden?

Da keine bestimmte Ordnung für das Erscheinen der Kugeln vorgeschrieben ist, so können sie in jeder möglichen Zusammenstellung erscheinen. p_1 Kugeln der ersten Art können daher durch alle Ziehungen zerstreut erscheinen, wenn nur die übrigen Ziehungen p_2 Kugeln der zweiten Art zeigen. Die Zahl der günstigen Fälle kommt daher mit der Anzahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Elemente zweier Reihen in (p_1+p_2) Fächer so zerstreut werden, dafs die der ersten p_1 und die der zweiten die übrigen Fächer einnehmen, während sie Versetzungen bilden. Die gesuchte Gruppen-Anzahl ist nach §. 42. No. 131. pag. 99 m. Comb. Lehre

$$\frac{(p_1+p_2)^{p_2|-1}}{1^{p_1|-1}}\, m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}.$$

Hieraus ist die Wahrscheinlichkeit

$$1. \quad w = \frac{(p_1+p_2)^{p_1|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}}{1^{p_1|1}(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}} = \frac{(p_1+p_2)^{p_2|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1}}{1^{p_2|1}(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}}.$$

In einer Urne sind r Kugel-Arten enthalten, m_1 der ersten, m_2 der zweiten, m_3 der dritten u. s. w., m_r der $r$ten Art. Man nimmt die Kugeln einzeln heraus, ohne sie in die Urne zurückzuwerfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs p_1 Kugeln der ersten, p_2 der zweiten, u. s. w., p_r der $r$ten Art erscheinen werden.

Durch weitere Verfolgung der eben angegebenen Schlufsweise ergiebt sich für diese Wahrscheinlichkeit folgender Ausdruck:

$$2. \quad w = \Big[\frac{(p_1+p_2+\ldots . p_r)^{p_1|-1}}{1^{p_1|1}} m_1^{p_1|-1} . \frac{(p_2+p_3+\ldots . p_r)^{p_2|-1}}{1^{p_2|1}} m_2^{p_2|-1}$$

$$\times \frac{(p_3+p_4+\ldots . p_r)^{p_3|-1}}{1^{p_3|1}} m_3^{p_3|-1} \ldots . \frac{(p_{r-1}+p_r)^{p_{r-1}|-1}}{1^{p_{r-1}|1}} m_{r-1}^{p_{r-1}|-1} . m_r^{p_r|-1}\Big]$$

$$: (m_1+m_2+m_3+\ldots . m_r)^{p_1+p_2+p_3+\ldots . p_r|-1},$$

oder anders:

$$3. \quad w = \frac{(p_1+p_2+p_3+\ldots . p_r)^{p_1+p_2+p_3+\ldots . p_r|-1} . m_1^{p_1|-1} . m_2^{p_2|-1} . m_3^{p_3|-1} \ldots . m_r^{p_r|-1}}{1^{p_1|1} . 1^{p_2|1} . 1^{p_3|1} \ldots . 1^{p_r|1}(m_1+m_2+m_3+\ldots . m_r)^{p_1+p_2+\ldots . p_r|-1}}.$$

Der Zähler in 2. giebt die Anzahl der Gruppen an, welche entstehen, wenn die Elemente von r Reihen in $(p_1+p_2+p_3+\dots p_r)$ Fächer zerstreut werden, so dafs p_1 Elemente der ersten, p_2 Elemente der zweiten u. s. w., p_r Elemente der $r$ten Reihe in den Fächern vorkommen und zugleich unter sich Versetzungen in allen möglichen Stellungen bilden. Er rechtfertigt sich aus 41. und 42. der angeführten Schrift und ergänzt und verallgemeinert die dortigen Sätze.

In einer Urne befinden sich zweierlei Kugeln, m_1 der ersten und m_2 der zweiten Art. (p_1+p_2) Kugeln werden auf einmal herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs p_1 Kugeln der ersten und p_2 Kugeln der zweiten Art erscheinen werden?

Es ist nach dem Sinne der Frage unzweifelhaft, dafs nur diejenigen Gruppen in Betrachtung kommen, die nicht die nämlichen Kugeln in verschiedener Stellung, sondern verschiedene Kugeln in sich begreifen; denn die nämlichen Kugeln in verschiedener Stellung untereinander geben keine neuen Resultate. Hiernach müssen bei diesen Gruppen die Versetzungen ausgeschlossen werden, und die Gruppen selbst fallen mit der Vertheilung der Elemente in Fächer zusammen. Wir erhalten die Zahl der günstigen Gruppen nach §. 39. pag. 90 der Comb. Lehre durch folgenden Ausdruck:

$$A = \frac{m_1^{m_1|-1}}{1^{p_1|1}.1^{m_1-p_1|1}} \cdot \frac{m_2^{m_2|-1}}{1^{p_2|1}.1^{m_2-p_2|1}} = \frac{m_1^{p_1|-1}.m_2^{p_2|-1}}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$4.\quad w = \frac{m_1^{p_1|-1}}{1^{p_1|1}} \cdot \frac{m_2^{p_2|-1}}{1^{p_2|1}} : \frac{(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}}{1^{p_1+p_2|1}}$$

$$= \frac{(p_1+p_2)^{p_1+p_2|-1}.m_1^{p_1|-1}.m_2^{p_2|-1}}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}}$$

$$= \frac{(p_1+p_2)^{p_1|-1}.m_1^{p_1|-1}.m_2^{p_2|-1}}{1^{p_1|1}(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}} = \frac{(p_1+p_2)^{p_2|-1}.m_1^{p_1|-1}.m_2^{p_2|-1}}{1^{p_2|1}(m_1+m_2)^{p_1+p_2|-1}}$$

In einer Urne sind r verschiedene Kugelarten enthalten, m_1 Kugeln der ersten, m_2 der zweiten u. s. w., m_r der $r$ten Art. Es werden $(p_1+p_2+p_3\dots p_r)$ Kugeln auf einmal herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs p_1 Kugeln der ersten, p_2 der zweiten u. s. w., p_r der $r$ten Art erscheinen werden?

Setzt man die eben angegebene Schlufsweise weiter fort, so gelangt man durch sie zu folgenden Ausdruck der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$5.\quad w = \frac{(p_1+p_2+p_3+\ldots p_r)^{p_1+p_2+\ldots p_r|-1}.m_1^{p_1|-1}.m_2^{p_2|-1}.m_3^{p_3|-1}\ldots m_r^{p_r|-1}}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}.1^{p_3|1}\ldots.1^{p_r|1}(m_1+m_2+m_3+\ldots.m_r)^{p_1+p_2+p_3+\ldots.p_r|-1}}.$$

In einer Urne sind r Arten von Kugeln enthalten: m_1 Kugeln der ersten, m_2 der zweiten, m_3 der dritten Art u. s. w. Man nimmt $(p_1+p_2+p_3+\ldots.p_r)$ Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln in die Urne zurückzuwerfen, und bringt sie in eine Abtheilung zusammen; dann nimmt man $(q_1+q_2+q_3\ldots.q_r)$ Kugeln heraus und bringt sie in eine zweite Abtheilung. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Abtheilung p_1 Kugeln der ersten, p_2 der zweiten u. s. w., p_r Kugeln der $r$ten; in der zweiten Abtheilung q_1 Kugeln der ersten, q_2 Kugeln der zweiten u. s. w., q_r Kugeln der $r$ten Art erscheinen werden?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn wir die Gleichung 2. oder 3. auf den vorliegenden Fall wiederholt anwenden. Die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Abtheilung Kugelgruppen von der genannten Mischung erscheinen werden, ist die dort angegebene. Die Wahrscheinlichkeit, dafs in der zweiten Abtheilung Kugelgruppen von der genannten Mischung erscheinen werden, ergiebt sich aus den nämlichen Gleichungen, wenn man bemerkt, dafs nur noch (m_1-p_1) Kugeln der ersten, (m_2-p_2) Kugeln der zweiten Art u. s. w., (m_r-p_r) Kugeln der $r$ten Art in der Urne vorhanden sind. Diese Werthe sind daher in 2. oder 3. zu setzen und die so erhaltenen Resultate mit einander zu verbinden. Demnach ist die fragliche Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{(p_1+p_2+\ldots.p_r)^{p_1+p_2+\ldots p_r|-1}.m_1^{p_1|-1}.m_2^{p_2|-1}\ldots.m_r^{p_r|-1}(q_1+q_2+\ldots.q_r)^{q_1+q_2+\ldots q_r|-1}}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}\ldots.1^{p_r|1}(m_1+m_2+\ldots.m_r)^{p_1+p_2+\ldots.p_r|-1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\ldots.1^{q_r|1}}$$
$$\times\frac{(m_1-p_1)^{q_1|-1}.(m_2-p_2)^{q_2|-1}(m_3-p_3)^{q_3|-1}\ldots.(m_r-p_r)^{q_r|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\ldots.m_r-(p_1+p_2+p_3+\ldots.p_r)+1)^{q_1+q_2+q_3+\ldots.q_r|-1}}.$$

Der Ausdruck vereinfacht sich sehr, wenn die zusammengehörigen Facultäten vereinigt werden. Es ist.

$$6.\quad w = \frac{1^{p_1+p_2+\ldots p_r|1}.1^{q_1+q_2+\ldots q_r|1}.m_1^{p_1+q_1|-1}.m_2^{p_2+q_2|-1}.m_3^{p_3+q_3|-1}\ldots.m_r^{p_r+q_r|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\ldots.m_r)^{p_1+p_2+\ldots p_r+q_1+q_2+\ldots q_r|-1}.1^{p_1|1}.1^{p_2|1}\ldots.1^{p_r|1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\ldots.1^{q_r|1}}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Man bringt $(p_1+p_2+p_3+\ldots.p_r)$ Kugeln aus der Urne in eine Abtheilung, $(q_1+q_2+q_3+\ldots.q_r)$ Kugeln in eine zweite, $(r_1+r_2+\ldots.r_r)$ Kugeln in eine dritte u. s. w., $(\nu_1+\nu_2+\ldots.\nu_r)$ in die letzte ($k$te)

Abtheilung. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Abtheilung p_1 Kugeln der ersten, p_2 Kugeln der zweiten u. s. w., p_r Kugeln der $r$ten Art, in der zweiten Abtheilung q_1 Kugeln der ersten, q_2 der zweiten u. s. w., q_r der $r$ten Art u. s. w., in der letzten ν_1 Kugeln der ersten, ν_2 der zweiten u. s. w., ν_r Kugeln der $r$ten Art enthalten sein werden?

Setzt man die vorhin gemachte Schlufsweise fort, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgender Ausdruck:

$$7. \quad w = \frac{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}.1^{z_3}\ldots.1^{z_k|1}.m_1^{u_1|-1}.m_2^{u_2|-1}.m_3^{u_3|-1}\ldots.m_r^{u_r|-1}}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}\ldots.1^{p_r|1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\ldots.1^{q_r|1}\ldots.1^{\nu_1|1}.1^{\nu_2|1}\ldots.1^{\nu_r|1}(m_1+m_2+m_3+\ldots.m_r)^{z_1+z_2+z_3+\ldots z_k|-1}}.$$

Hier gelten folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} p_1+p_2+p_3+\ldots.p_r &= z_1, \\ q_1+q_2+q_3+\ldots.q_r &= z_2, \\ r_1+r_2+r_3+\ldots.r_r &= z_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots.\nu_r &= z_k, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_1+q_1+r_1+\ldots.\nu_1 &= u_1, \\ p_2+q_2+r_2+\ldots.\nu_2 &= u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_r+q_r+r_r+\ldots.\nu_r &= \nu_r. \end{aligned}$$

Ferner kann $u_1 \gtreqless m_1$, $u_2 \gtreqless m_2$, $u_3 \gtreqless m_3$, ... $u_r \gtreqless m_r$ sein.

In einer Urne sind r Arten von Kugeln enthalten: m_1 Kugeln der ersten, m_2 der zweiten Art u. s. w. Man nimmt $(p_1+p_2+p_3+\ldots.p_r)$ Kugeln auf einmal heraus und bringt sie in eine Abtheilung; dann $(q_1+q_2+q_3+\ldots.q_r)$ und bringt sie eine zweite u. s. f.; endlich $(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots.\nu_r)$ Kugeln und bringt sie in die $k$te Abtheilung. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Abtheilung p_1 Kugeln der ersten, p_2 Kugeln der zweiten u. s. w., p_r Kugeln der $r$ten Art; in der zweiten q_1 Kugeln der ersten, q_2 der zweiten u. s. w., q_r der $r$ten Art enthalten sein werden u. s. f.?

Benutzen wir die Gleichung 5. auf dieselbe Weise, wie wir so eben die Gleichung 2. oder 3. zur Auffindung der Gleichungen 6. und 7. benutzten, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgende Formel:

$$8. \quad w = \frac{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}.1^{z_3|1}\ldots.1^{z_k|1}.m_1^{u_1|-1}.m_2^{u_2|-1}.m_3^{u_3|-1}\ldots.m_r^{u_r|-1}}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}\ldots.1^{p_r|1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\ldots.1^{q_r|1}\ldots.1^{\nu_1|1}.1^{\nu_2|1}\ldots.1^{\nu_r|1}(m_1+m_2+m_3+\ldots.m_r)^{z_1+z_2+\ldots z_k|-1}}.$$

Die Bedingungsgleichungen sind dieselben wie in 7. Werden unter den angegebenen Bedingungen alle Kugeln aus der Urne gezogen und in Abtheilungen vertheilt, so bleiben die Gleichungen 7. und 8. noch immer in Kraft; die Bedingungsgleichungen erfahren aber einige Modificationen und gehen in folgende über:

$$9. \quad \begin{cases} p_1+p_2+p_3+\dots p_r = z_1, \\ q_1+q_2+q_3+\dots q_r = z_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\dots\nu_r = z_r, \\ p_1+q_1+r_1+\dots\nu_1 = m_1 = u_1, \\ p_2+q_2+r_2+\dots\nu_2 = m_2 = u_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_r+q_r+r_r+\dots\nu_r = m_r = u_r. \end{cases}$$

In diesem Falle müssen natürlich gerade so viele Fächer angenommen werden, als Kugel-Arten vorhanden sind.

Die Gleichungen 3. und 5., 7. und 8. stimmen an Inhalt überein. Dies rechtfertigt folgende Behauptung:

10. Unter den oben angegebenen Bedingungen ist es hinsichtlich des Erfolges einerlei, ob irgend eine Anzahl von Kugeln einzeln oder in Masse aus einer Urne herausgenommen und in eine oder mehrere Abtheilungen gebracht wird; denn die unter beiden Voraussetzungen gewonnenen Wahrscheinlichkeiten sind gleich grofs.

Dieser Satz findet in allen Fällen Anwendung, wenn nicht eine bestimmte Ordnung bei dem Erscheinen der einzelnen Kugeln in Betracht kommt. Letzteres ist bei dem Lotto der Fall, weil in diesem Spiele der bestimmte Auszug und die bestimmte Ambe besetzt werden können. Hier müssen deshalb die Nummern einzeln gezogen werden. Bei den Cartenspielen z. B. findet der Satz seine Anwendung, und es können die Blätter einzeln oder partieenweise ausgegeben werden. Bei hinlänglicher Mischung, welche der Calcul voraussetzt, wird es auch in der That einerlei sein, auf welche Weise die Blätter ausgegeben werden. Da aber dies nicht immer sorgfältig geschieht, so giebt das Vertheilen in einzelnen Blättern eine bessere Mischung.

Sind die Anzahlen der verschiedenen Kugel-Arten einander gleich, also $m_1 = m_2 = \dots m_r = m$, und ebenso die Zahl der Kugeln, welche in

die verschiedenen Abtheilungen gebracht werden sollen, so ergeben sich einfachere Ausdrücke. Aus 7. oder 8. und 9. wird

$$11. \quad w = \frac{(1^{s|1})^s}{1^{p_1|1}.1^{p_2|1}\dots 1^{p_r|1}.1^{q_1|1}.1^{q_2|1}\dots 1^{q_r|1}\dots 1^{\nu_1|1}.1^{\nu_2|1}\dots 1^{\nu_r|1}(rm)^{rm|-1}}.$$

Die Gleichungen 7. und 8. sind übrigens ganz allgemein; denn sie gelten noch, wenn auch nicht in jeder Abtheilung Kugeln von allen Arten vorkommen sollten. Für diesen Fall sind die Exponenten der betreffenden Facultäten 0 zu setzen; wodurch die Gültigkeit der genannten Gleichungen in nichts geändert wird.

Die Anordnung bei der Vertheilung in Fächer ist daher der Willkür überlassen.

§. 6.

In einer Urne sind m weifse und n nicht weifse Kugeln enthalten. Man nimmt r Kugeln auf einmal heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs r weifse Kugeln erscheinen werden?

Die Zahl der der Erwartung günstigen Kugelgruppen, ist, wie sich leicht ergiebt, $\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}$. Die Zahl aller möglichen Gruppen ist $\frac{(m+n)^{r|-1}}{1^{r|1}}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$1. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Das nämliche Resultat ergiebt sich aus 7. §. 4., wenn dort $m_1 = m$, $m_2 = n$, $p_1 = r$, $p_2 = 0$ und $r = 1$ gesetzt wird.

Die Mischung der Kugeln ist die gleiche. Zwei Ziehungen werden gemacht. In der ersten werden p Kugeln herausgenommen und, ohne die Mischung zu untersuchen, bei Seite gesetzt. In der zweiten werden r Kugeln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs r weifse Kugeln in der zweiten Ziehung erscheinen werden?

Folgende Fälle können in der ersten Ziehung vorausgegangen sein:

2.

p	weifse Kugeln und	0	nicht weifse,	
$p-1$	- - - - -	1	- - -	
$p-2$	- - - - -	2	- - -	
. . . . .	. . . . .	. . .	. . .	
1	- - - - -	$p-1$	- - -	
0	- - - - -	p	- - -	

Benutzt man die Gleichung 4. §. 5., so sind die diesen Fällen entsprechenden Kugelgruppen:

$$\frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}+\frac{n}{1}\cdot\frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}+\ldots.\frac{m}{1}\cdot\frac{n^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}+\frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Mit jedem dieser Fälle sollen p weifse Kugeln in der zweiten Ziehung in Verbindung treten. Im ersten Falle sind nur noch $(m-p)$, im zweiten $(m-p+1)$, im dritten $(m-p+2)$ u. s. w., im $(p+1)$ten Falle m weifse Kugeln in der Urne zurück. Diese Bemerkung führt zu folgender, der Erwartung günstigen Gruppen-Anzahl, wenn wir für jeden einzelnen Fall die Gleichung zu 4. §. 5. mit Rücksicht auf die veränderte Kugel-Anzahlen benutzen:

$$A=\frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{(m-p)^{r|-1}}{1^{r|1}}+\frac{n}{1}\cdot\frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\cdot\frac{(m-p+1)^{p|-1}}{1^{p|1}}+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}\cdot\frac{(m-p+2)^{p|-1}}{1^{p|1}}+\ldots.$$

$$\ldots+\frac{n^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\cdot m\,\frac{(m-1)^{p|-1}}{1^{p|1}}+\frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}$$

$$=\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\left[\frac{(m-r)^{p|-1}}{1^{p|1}}+\frac{n}{1}\cdot\frac{(m-r)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(m-r)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}+\ldots.\frac{n^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\cdot\frac{m-r}{1}+\frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}\right],$$

nemlich, wenn die Facultät $\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}$ ausgeschieden wird und die zur Ausscheidung nöthigen Veränderungen gemacht werden.

Nun findet bekanntlich folgende Gleichung Statt:

$$3.\quad \frac{(a+b)^{x|-1}}{1^{x|1}}=\frac{a^{x|-1}}{1^{x|1}}+\frac{a^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}}\cdot\frac{b}{1}+\frac{a^{x-2|-1}}{1^{x-2|-1}}\cdot\frac{b^{2|-1}}{1^{2|1}}+\ldots.\frac{a}{1}\cdot\frac{b^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}}+\frac{b^{x|-1}}{1^{x|1}}.$$

Wird die Gleichung 3. auf den vorhergehenden, in Klammern eingeschlossenen Ausdruck angewendet, so ist

$$A=\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{(m+n-r)^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Die Zahl aller möglichen Kugelgruppen, wenn unter den oben genannten Bedingungen p und r Kugeln in zwei Abtheilungen aus der Urne genommen werden, ist

$$A_1=\frac{(m+n)^{p+r|-1}}{1^{r|1}.1^{p|1}}=\frac{(m+n)^{r|-1}.(m+n-r)^{p|-1}}{1^{r|1}.1^{p|1}}.$$

Hieraus ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$4.\quad w=\frac{A}{A_1}=\frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Unter den oben angegebenen Bedingungen werden drei Ziehungen aus der Urne gemacht. Bei der ersten werden p, bei der zweiten q Kugeln herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in besondere Abtheilungen gebracht. Bei der dritten werden r Kugeln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der dritten Ziehung nur r weifse Kugeln erscheinen werden?

Die Fälle, auf deren Betrachtung die Beantwortung der vorliegenden Frage beruht, und die in dem Schema 2. angegeben wurden, bleiben ungeändert. An jeden einzelnen Fall schliefsen sich die in dem nachfolgenden Schema verzeichneten Fälle an, welche in der zweiten Ziehung eintreten können:

$$5.\quad \left\{\begin{array}{llll} q & \text{weifse Kugeln und} & 0 & \text{nicht weifse werden gezogen,} \\ q-1 & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} & 1 & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} \\ q-2 & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} & 2 & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} & q-1 & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} \\ 0 & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} & q & \text{-}\quad\text{-}\quad\text{-}\quad\text{-} \end{array}\right.$$

An jede Verbindung von je zwei in dem Schema 2. und 5. angegebenen Fällen knüpft sich die Erscheinung von r weissen Kugeln in der dritten Ziehung. Wir erhalten nun durch den Zusammentritt des ersten Falles im Schema 2. mit allen Fällen des Schema's 5. und mit r weifsen Kugeln der dritten Ziehung folgende Anzahl:

$$A_1 = \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}\left[\frac{(m-p)^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot\frac{(m-p-q)^{r|-1}}{1^{r|1}} + n.\frac{(m-p)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\cdot\frac{(m-q-p+1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right.$$
$$\left. + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(m-p)^{q-2|-1}}{1^{q-2|1}}\cdot\frac{(m-p-q+2)^{r|-1}}{1^{r|1}} + \ldots \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot\frac{(m-p)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]$$
$$= \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{(m-p)^{r|-1}}{1^{r|1}}\left[\frac{(m-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} + n.\frac{(m-p-r)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(m-p-r)^{q-2|-1}}{1^{q-2|1}}\right.$$
$$\left. + \ldots \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\right]$$

$$6.\quad A_1 = \frac{m^{p+r|-1}}{1^{p|1}.1^{r|1}}\cdot\frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{(m-r)^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}},$$

Dieser Ausdruck entsteht, wenn die Facultät $\frac{(m-p)^{r|-1}}{1^{r|1}}$ ausgeschieden und dann die erhaltene Reihe nach 3. behandelt wird. Durch den Zusammentritt des zweiten Falles im Schema 2. mit allen Fällen im Schema 5. und weitern r weifsen Kugeln in der dritten Ziehung erhalten wir folgende Anzahl:

$$A_2 = \frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{n}{1} \Big[\frac{(m-p+1)^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot \frac{(m-p-q+1)^{r|-1}}{1^{r|1}} + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{(m-p-q+2)^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

$$+ \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{q-2|1}}{1^{q-2|1}} \cdot \frac{(m-p-q+3)^{r|-1}}{1^{r|1}} + \dots \frac{(n-1)^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{r|-1}}{r^{|1}} \Big]$$

$$= \frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{(m-p+1)^{r|-1}}{1^{r|1}} \Big[\frac{(m-p-r+1)^{q|-1}}{1^{q|1}} + \frac{(n-1)}{1} \cdot \frac{(m-p-r+1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

$$+ \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-p-r+1)^{q-2|-1}}{1^{q-2|1}} + \dots \frac{(n-1)^{q|-1}}{1^{q|-1}} \Big],$$

$$7. \quad A_2 = \frac{m^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot n \frac{(m-p+1)^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot n \frac{(m-r)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}}.$$

Durch den Zusammentritt des dritten Falles im Schema 2. mit sämmtlichen Fällen im Schema 5. und mit r weifsen Kugeln in der dritten Ziehung erhalten wir durch eine ähnliche Behandlungsweise folgende Anzahl:

$$8. \quad A_3 = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-r)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, die Fälle im Schema 2. der Reihe nach mit sämmtlichen Fällen im Schema 5. und mit r weifsen Kugeln in der dritten Ziehung zusammentreten zu lassen, so ergiebt sich aus 6., 7., 8. u. s. w. folgender Ausdruck:

$$9. \quad A = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} \Big[\frac{(m-r)^{p|-1}}{1^{p|1}} + n \frac{(m-r)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-r)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} + \dots + \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} \Big]$$

$$= \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m+n-r)^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{(m+n-p-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{(m+n-r)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}};$$

wie sich durch Benutzung der Gleichung 3. ergiebt. Die Zahl aller möglichen Fälle, welche entstehen, wenn $(m+n)$ Kugeln in drei Abtheilungen zu p, q und r Kugeln vertheilt werden, ist

$$10. \quad B = \frac{(m+n)^{p+q+r|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}.1^{r|1}} = \frac{(m+n)^r (m+n-r)^{p+q|-1}}{1^{r|1}.1^{p|1}.1^{q|1}}.$$

Aus 9. und 10. ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$11. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht weiter fortsetzen und auf das Erscheinen von r weifsen Kugeln in jeder beliebigen spätern Ziehung übertragen. Werden daher $(k-1)$ Ziehungen gemacht, in welchen p_1, p_2, p_3, ..., p_{k-1} Kugeln, ohne die Mischung der erschienenen Kugeln zu untersuchen, herausgenommen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs

in der $k$ten Ziehung r weifse Kugeln erscheinen werden, wenn r Kugeln in dieser Ziehung herausgenommen werden,

$$12. \qquad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Die Vergleichung der unter 1. 4. 11. und 12. gefundenen Resultate führt zu folgendem Satze:

13. Werden aus einer Urne, welche m Kugeln von einer und n von einer andern Art enthält, mehrere Ziehungen gemacht, in diesen Ziehungen p_1, p_2, p_3, ... p_r Kugeln herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in verschiedene Abtheilungen gebracht, so ist die Wahrscheinlichkeit in irgend einer Abtheilung, in welche gerade p_k Kugeln auf einmal gebracht wurden, nur Kugeln der einen Art zu erhalten, so grofs als die Wahrscheinlichkeit, Kugeln derselben Art in einer früheren oder späteren Abtheilung zu erhalten, wenn die gleiche Zahl von Kugeln (p_k) in dieser Abtheilung vorkommt.

Die Zahl der vorhergegangenen Ziehungen und die Zahl der darin erschienenen Kugeln hat hiernach auf die fragliche Wahrscheinlichkeit unter den genannten Bedingungen keinen Einflufs. An diese Bemerkung knüpft sich unmittelbar folgender Satz:

14. Sollen aus einer Urne, in welcher zweierlei Kugeln enthalten sind, mehrere Ziehungen gemacht, bei denselben p_1, p_2, p_3, ... p_r Kugeln herausgenommen und die Kugeln, ohne ihre Mischung zu kennen, in verschiedene Abtheilungen gebracht werden, und wünscht man in einer Abtheilung nur p_k Kugeln von der einen Art zu erhalten, so ist die Ordnung, in welcher die genannten Kugelmengen herausgenommen und in die Abtheilungen gebracht werden, gleichgültig.

Sind aber unter den genannten Bedingungen schon mehrere Ziehungen gemacht, und kennt man die Mischung der dabei erschienenen Kugeln, so ändert sich das Verhältnifs der in der Urne zurückgebliebenen Kugeln; aber nicht die Schlufsweise. Sind nämlich schon a Kugeln der ersten und b der zweiten Art erschienen, so ist die Wahrscheinlichkeit, in irgend einer Ziehung, worin r Kugeln auf die oben angegebene Weise herausgenommen werden, nur Kugeln der ersten Art zu erhalten:

$$15. \qquad w = \frac{(m-a)^{r|-1}}{(m+n-a-b)^{r|-1}}.$$

Ist die Zahl der beiden Kugel-Arten gleich, also $m=n$, und wird nur

eine Kugel jedesmal herausgenommen, so geht 1. 4. 11. oder 12. in

$$16. \quad w = \tfrac{1}{2}$$

über. Die Wahrscheinlichkeit, bei jeder Ziehung eine weifse Kugel erscheinen zu sehen, ist daher 0,5; wenn auch schon mehrere Kugeln gezogen sind, deren Mischung man nicht kennt.

Die bis jetzt gefundenen Resultate gelten vorerst nur von zwei Arten von Kugeln. Sie lassen sich jedoch leicht auf mehrere Arten von Kugeln ausdehnen. Es ist nur nöthig, einer Kugel-Art mehrere zusammen gegenüber zu stellen, und die zweite als Repräsentant von mehreren zu betrachten. Setzt man daher

$$n = m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_{s-1} \quad \text{und} \quad m = m_s,$$

so geht die Gleichung 12. in folgende über:

$$17. \quad w = \frac{m_s^{r|-1}}{(m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_s)^{r|-1}}.$$

Die hier gefundenen Gesetze gelten, wenn sich das Erscheinen von Kugeln einer Art nur auf eine Ziehung erstreckt. Sie gelten aber auch, wenn es sich auf mehrere Ziehungen erstreckt. Dies führt zu folgender Frage:

In einer Urne befinden sich s Arten von Kugeln, von denen die erste m_1, die zweite m_2, die dritte m_3 u. s. w., die $s$te m_s Kugeln zählt. Man zieht zweimal und nimmt in der ersten Ziehung p, in der zweiten q Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in beiden Ziehungen nur Kugeln von einer Art (m_1) erscheinen werden.

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich aus §. 2. leicht. Sie ist

$$A = \frac{m_1^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{(m_1 - p)^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1}}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist, aus den nämlichen Gründen,

$$A_1 = \frac{(m_1 + m_2 + \dots m_s)^{p+q|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$18. \quad w = \frac{m_1^{p+q|-1}}{(m_1 + m_2 + \dots m_s)^{p+q|-1}}.$$

Die Bedingungen sind dieselben. Man zieht dreimal, nimmt in der ersten Ziehung k Kugeln heraus, die man, ohne ihre Mischung zu kennen, in eine Abtheilung bringt. In der zweiten Ziehung nimmt man p, in der dritten q Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in den beiden letzten Ziehungen nur Kugeln von einer bestimmten Art (m_1) erscheinen werden? Es sind folgende Fälle zu untersuchen.

In der ersten Ziehung erscheinen

19.
p	Kugeln der bestimmten Art,	0	Kugeln von den übrigen Arten,
$p-1$	- - - -	1	Kugel - - - -
$p-2$	- - - -	2	Kugeln - - - -
. . .	. . .	. . .	. . .
1	Kugel - - -	$p-1$	- - - - -
0	- - - -	p	- - - - -

Nach dem Früheren ist die Zahl der hiedurch bedingten Gruppen, wenn die Zahl der übrigen Kugel-Arten der Kürze wegen $m_2+m_3+m_4+\dots m_s = n$ gesetzt wird,

$$m_1^{k|-1}+\frac{m_1^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}\cdot\frac{n}{1}+\frac{m_1^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}\cdot\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}+\frac{m_1^{k-3|-1}}{1^{k-3|1}}\cdot\frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}+\dots\frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}}.$$

Mit jedem dieser Fälle sollen $(p+q)$ Kugeln von der bestimmten Art in den zwei folgenden Ziehungen in Verbindung treten. Es findet sich

$$A=\frac{m_1^{k|-1}}{1^{k|1}}\cdot\frac{(m_1-k)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}+n.\frac{m_1^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}\cdot\frac{(m_1-k+1)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}$$

$$+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m_1^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}\cdot\frac{(m_1-k+2)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}+\dots\frac{n^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}\cdot\frac{m_1}{1}\cdot\frac{(m_1-1)^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}+\frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}}.$$

Wird aus den Gliedern dieses Ausdrucks die Facultät $\frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}$ ausgeschieden, so geht derselbe in folgenden über:

$$A=\frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}\left[\frac{(m_1-p-q)^{k|-1}}{1^{k|1}}+n\frac{(m_1-p-q)^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(m_1-p-q)^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}+\dots\frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}}\right]$$

$$=\frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}\cdot\frac{(m_1+n-p-q)^{k|-1}}{1^{k|1}}=\frac{m_1^{p+q|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}}\cdot\frac{(m_1+m_2+\dots+m_s-p-q)^{k|-1}}{1^{k|1}}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist

$$A_1=\frac{(m_1+m_2+\dots m_s)^{p+q+k|-1}}{1^{p|1}.1^{q|1}.1^{k|1}}.$$

Hieraus ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$20.\qquad w=\frac{m_1^{p+q|-1}}{(m_1+m_2+m_3+\dots m_s)^{p+q|-1}}.$$

Dasselbe Resultat würde man erhalten haben, wenn man die Wahrscheinlichkeit bestimmt hätte, dafs in der ersten Ziehung p, in der dritten q Kugeln einer bestimmten Art erscheinen werden, während in der zweiten Ziehung k Kugeln herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in eine besondere Abtheilung gebracht werden.

Führen wir die obige Schlufsweise weiter fort, so finden wir leicht, dafs die Gleichung 20. unverändert bleibt, wenn auch Kugeln von einerlei Art in je zwei spätern Ziehungen, sie mögen unmittelbar, oder nicht unmittelbar aufeinander folgen, erscheinen sollen. Wird auch das in Frage stehende Ereignifs noch zusammengesetzter als bisher, so ändert sich doch an der Schlufsweise nichts; selbst nicht in dem Fall, wenn mehrere Kugel-Arten in den verschiedenen Abtheilungen vorkommen sollten. Berücksichtigen wir ferner, dafs dabei mehrere Kugel-Arten in einer und derselben Ziehung vorkommen können, und dafs die Ordnung unter den Kugelmengen, die in den verschiedenen Ziehungen erscheinen sollen, keine Aenderung des Resultats bedingt, so werden wir zu folgendem Satze geführt.

21. Werden aus einer Urne, die beliebig viele Kugel-Arten enthält, mehrere Ziehungen gemacht, bei denselben die Kugelmengen p_1, p_2, p_3, ... p_r herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in verschiedene Abtheilungen gebracht, und man dann verlangt, dafs in einer oder in mehreren Abtheilungen Kugeln von einer bestimmten Art oder von bestimmten Verhältnissen aus verschiedenen Arten enthalten sein sollen, so ist die Ordnung, nach welcher die Kugeln in die verschiedenen Abtheilungen gebracht werden, oder die Ordnung unter den verschiedenen Abtheilungen, gleichgültig, und es kann Jemand, der p_k Kugeln von beliebiger Mischung aus einer Abtheilung zu entnehmen wünscht, dazu jede beliebige Abtheilung wählen, wenn sie nur die gehörige Zahl von Kugeln enthält.

Sind schon mehrere Ziehungen gemacht, und ist das Verhältnifs der dabei erschienenen Kugeln bekannt, so ändert sich nach Maafsgabe der Gleichung 15. die Zahl der vorhandenen Kugeln; aber nicht die hier befolgte Schlufsweise.

Ein specieller Fall des hier behandelten allgemeinen Problems, nämlich No. 16., findet sich im *Journal de l'école polytechn. T. XV. Cah. XXIV. pag.* 264 — 278 auf ziemlich weitläufigem Wege behandelt. Das dortige Problem ist nur in der Form von dem hier aufgestellten verschieden, und zugleich sehr speciell. Es läfst sich allgemeiner so stellen:

In einer Urne sind r Kugel-Arten enthalten. p Kugeln werden herausgenommen und, ohne ihre Mischung zu kennen, in eine zweite Urne gebracht. Man zieht von den Kugeln der zweiten Urne q Kugeln heraus, und findet, dafs sie einer bestimmten Art angehören. Darauf werden noch weiter s Ku-

geln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen s Kugeln der nämlichen Art angehören werden?

Dieses Problem fällt mit folgendem zusammen.

In einer Urne sind r Kugel-Arten enthalten. Man zieht q Kugeln aus der Urne und findet sie von einer bestimmten Art. In einer zweiten Ziehung nimmt man s Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs diese Kugeln der nämlichen Art angehören werden?

Denn es ist einerlei, ob man mehr als $(p+s)$ Kugeln (etwa p) auf einmal aus der Urne nimmt, in eine zweite Urne wirft, von diesen zuerst q Kugeln trennt, das Genannte bemerkt, dann noch weitere s Kugeln davon trennt und den Rest zurückwirft: oder ob man aus der ersten Urne direct zuerst q Kugeln und dann weiter s Kugeln herausnimmt, nachdem man an den q Kugeln der ersten Ziehung das Genannte bemerkt hat.

§. 7.

Im vorigen Paragraph wurde das gegebene Problem unter der Voraussetzung betrachtet, dafs die Kugeln auf einmal aus der Urne genommen werden. Die Kugeln können aber auch einzeln aus der Urne gezogen werden. Es fragt sich, ob dann die nämlichen Gesetze noch immer gelten? Dies führt zu folgender Frage.

In einer Urne sind zwei Arten von Kugeln enthalten, von welchen die erste m, die zweite n Kugeln zählt. Man zieht r Kugeln einzeln heraus und wirft die gezogenen Kugeln nicht in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen Kugeln von der ersten Art sind?

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen ist $m^{r|-1}$, die aller möglichen ist $(m+n)^{r|-1}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$1. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Man zieht zuerst p Kugeln einzeln heraus und bringt sie, ohne ihre Mischung zu kennen, in eine Abtheilung; dann nimmt man r Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln zurückzuwerfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in den r letzten Ziehungen nur Kugeln der ersten Art erscheinen werden?

Es sind hier folgende Fälle möglich. In den ersten p Ziehungen erscheinen

2. $\begin{cases} p \text{ Kugeln der ersten Art und } 0 \text{ Kugeln der zweiten,} \\ p-1 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 1 \text{ Kugel} \quad - \quad - \\ p-2 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 2 \text{ Kugeln} \quad - \quad - \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad p \quad - \quad - \quad - \end{cases}$

Die Betrachtung des ersten Falles führt zu folgender Gruppen-Anzahl:

$$A_1 = m^{p|-1}.$$

Nach dem zweiten Falle kann eine Kugel zweiter Art mit $p-1$ Kugeln erster Art in Verbindung treten. Hiernach kommen die Zerstreuungen von zweierlei Elementen in p Fächer in Frage, so dafs ein Element der einen Reihe mit $p-1$ Elementen der andern zusammentritt. Nach §. 42. der Combinationslehre ist die zugehörige Gruppen-Anzahl

$$A_2 = \frac{p}{1} m^{p-1|-1} n.$$

Nach dem zweiten Falle kommen die Zerstreuungen von zweierlei Elementen in p Fächer in Frage, so dafs zwei Elemente der einen Reihe mit $p-2$ Elementen der andern Reihe in Verbindung treten. Die Gruppen-Anzahl ist

$$A_3 = \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} m^{p-2|-1} n^{2|-1}.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse ergiebt sich folgende Gruppen-Anzahl:

3. $$A = m^{p|-1} + \frac{p}{1} m^{p-1|-1} n + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} m^{p-2|-1} n^{2|-1} + \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} m^{p-3|-1} n^3 + \ldots \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}} n^{p|-1}.$$

Mit jedem der in 3. aufgeführten Fälle sollen p Kugeln der ersten Art in den r folgenden Ziehungen zusammentreten. Dies führt zu folgendem Ausdrucke:

$$B = m^{p|-1}(m-p)^{r|-1} + \frac{p}{1}.n\,m^{p-1|-1}(m-p+1)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}.n^{2|-1} m^{p-2|-1}(m-p+2)^{r|-1}\ldots$$
$$\ldots + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}.n^{p-1|-1} m\,(m-1)^{r|-1} + \frac{p^{p|-1}}{1^{q|1}}.n^{p|-1} m^{r|-1}$$
$$= m^{r|-1}\Big[(m-r)^{p|-1} + \frac{p}{1}.n(m-r)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}.n^{2|-1}(m-r)^{p-2|-1} + \ldots n^{p|-1}\Big].$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe läfst sich nach folgender Gleichung summiren:

4. $$(a+b)^{x|-1} = a^{x|-1} + \frac{x}{1} a^{x-1|-1} b + \frac{x^{2|-1}}{1^{2|1}} a^{x-2|-1} b^2 + \ldots \frac{x^{x|-1}}{1^{x|1}} b^x.$$

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen ist demnach

$$B = m^{r|-1}(m+n-r)^{p|-1};$$

die aller möglichen ist

$$C = (m+n)^{p+r|-1} = (m+n)^{r|-1}(m+n-r)^{p|-1}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$5. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^{r|-1}}$$

Vergleicht man die in 1. und 5. gefundenen Resultate mit denen im vorigen Paragraph gefundenen, 1. und 4., so liegt ihre Identität vor Augen. Setzt man nun die eben bezeichnete Schlufsweise weiter fort, so wird man auf folgenden Satz geführt:

6. Die im vorigen Paragraph gefundenen Gesetze gelten nicht nur, wenn die Kugelmengen auf einmal, sondern auch, wenn die Kugeln einzeln, aber in gleicher Zahl, aus der Urne genommen werden.

Die Art und Weise, wie die Kugeln aus der Urne genommen werden, hat also unter den vorliegenden Bedingungen auf das zu erwartende Resultat keinen Einflufs; wie wir solches auch schon unter andern Voraussetzungen in §. 4. und §. 5. gesehen haben.

§. 8.

In einer Urne sind m weifse und n schwarze Kugeln enthalten. Es wird $p$mal gezogen und jedesmal eine Kugel herausgenommen. So oft eine schwarze Kugel erscheint, wird sie zurückgeworfen, so oft eine weifse erscheint, wird sie durch eine schwarze ersetzt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach p Ziehungen r weifse Kugeln erscheinen, also noch $m-r$ weifse Kugeln in der Urne zurückgeblieben sind?

Die Wahrscheinlichkeit, unter den genannten Bedingungen eine weifse Kugel zu ziehen, ist $\frac{m}{m+n}$, die, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist $\frac{n}{m+n}$. Diese Wahrscheinlichkeiten bleiben unverändert, so lange nur schwarze Kugeln erscheinen. Sie ändern sich, sobald eine weifse Kugel erscheint. Die Zahl der weifsen Kugeln vermindert sich dann um eine; die der schwarzen vergröfsert sich um eine. Die Wahrscheinlichkeiten, eine weifse und eine schwarze Kugel zu ziehen, gehen dann in $\frac{m-1}{m+n}$ und $\frac{n+1}{m+n}$ über. Ist noch eine weitere weifse Kugel erschienen, so ändert sich die Zahl der Kugeln wiederholt, und die Wahrscheinlichkeiten gehen in $\frac{m-2}{m+n}$ und $\frac{n+2}{m+n}$ über u. s. w.

Zur Beantwortung der vorliegenden Frage werden wir durch Betrachtung einfacher Fälle gelangen. Wir bestimmen zuerst die Wahrschein-

lichkeit, dafs unter den genannten Bedingungen gerade eine weifse Kugel (nicht mehr, nicht weniger) gezogen werde.

Soll dies geschehen, so müssen folgende Fälle eintreten: die weifse Kugel erscheint entweder gerade im ersten, oder im zweiten, oder im dritten u. s. w., oder im $p$ten Zuge. Jeder Fall setzt voraus, dafs in den übrigen $p-1$ Zügen nur schwarze Kugeln erscheinen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs die weifse Kugel gerade in der ersten Ziehung erscheine, ist

$$w_1 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^{p-1}}{(m+n)^{p-1}} = \frac{m(n+1)^{p-1}}{(m+n)^p};$$

diejenige, dafs sie gerade in der zweiten Ziehung erscheine, setzt voraus, dafs in der ersten und in den $p-2$ letzten Ziehungen eine schwarze Kugel erscheine. Es ist also

$$w_2 = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^{p-2}}{(m+n)^{p-2}} = \frac{m.n(n+1)^{p-2}}{(m+n)^p}.$$

Diejenige, dafs sie gerade in der dritten Ziehung erscheine, erfordert das Vorausgehen von zwei und das Nachfolgen von $p-3$ schwarzen Kugeln. Sie ist

$$w_3 = \frac{n^2}{(m+n)^2} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^{p-3}}{(m+n)^{p-3}} = \frac{m.n^2(n+1)^{p-3}}{(m+n)^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs in der letzten Ziehung die weifse Kugel erscheine, beruht auf dem Vorausgehen von $p-1$ schwarzen Kugeln. Sie ist

$$w_p = \frac{n^{p-1}}{(m+n)^{p-1}} \cdot \frac{m}{m+n} = \frac{m.n^{p-1}}{(m+n)^p}.$$

Einer dieser Fälle kann eintreten. Die Wahrscheinlichkeit für den angegebenen besondern Fall ist

$$1. \quad w = \frac{m}{(m+n)^p}\left[(n+1)^{p-1} + n(n+1)^{p-2} + n^2(n+1)^{p-3} + \ldots . n^{p-2}(n+1) + n^{p-1}\right].$$

Die in den Klammern eingeschlossenen Ausdrücke stellen sich als die Summenproducte der Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen $n, n+1$ zur $(p-1)$ten Classe nach §. 28. m. Combinationslehre dar. Diese Bemerkung führt zu folgender Formel:

$$2. \quad w = \frac{m}{(m+n)^p} . SC'(n, n+1)^{p-1}.$$

Wir suchen nun die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen gerade zwei weifse Kugeln erscheinen werden.

Folgende Fälle genügen. Die beiden weifsen Kugeln erscheinen gerade in der 1ten u. 2ten, 1ten u. 3ten, 1ten u. 4ten u. s. w., 1ten u. $p$ten Ziehung, oder in der 2ten u. 3ten, 2ten u. 4ten, 2ten u. 5ten u. s. w., 2ten u. $p$ten Ziehung, oder in der 3ten u. 4ten, 3ten u. 5ten, 3ten u. 6ten u. s. w., 3ten u. $p$ten Ziehung u. s. w., oder endlich in der $(p-1)$ten und $p$ten Ziehung. Die Zahl dieser Fälle kommt mit den Zerstreuungen von zwei Elementen in p Fächer überein. Soll nun die jedem einzelnen Falle entsprechende Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, so ist zu beachten, dafs das Erscheinen einer schwarzen Kugel in den vorausgehenden, zwischenliegenden oder nachfolgenden Ziehungen mit in den Calcul aufgenommen werden mufs. Es ergeben sich daher folgende Ausdrücke für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$w_1 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(m-1)}{m+n} \cdot \frac{(n+2)^{p-2}}{(m+n)^{p-2}} = \frac{m^{2|-1}(n+2)^{p-2}}{(m+n)^p},$$

$$w_2 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n} \cdot \frac{(n+2)^{p-3}}{m+n} = \frac{m^{2|-1}(n+1)(n+2)^{p-3}}{(m+n)^p},$$

$$w_3 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^2}{(m+n)^2} \cdot \frac{m-1}{m+n} \cdot \frac{(n+2)^{p-4}}{(m+n)^{p-4}} = \frac{m^{2|-1}(n+1)^2(n+2)^{p-4}}{(m+n)^p},$$

. . . .

$$w_{p-1} = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{(n+1)^{p-2}(m-1)}{(m+n)^{p-2}(m+n)} = \frac{m^{2|-1}(n+1)^{p-2}}{(m+n)^p},$$

$$w_p = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(m-1)}{m+1} \cdot \frac{(n+2)^{p-3}}{(m+n)^{p-3}} = \frac{m^{2|-1}n(n+2)^{p-3}}{(m+n)^p},$$

. . . .

Der letzte Fall giebt

$$w_z = \frac{n^{p-z}m(m-1)}{(m+n)^{p-z}(m+n)(m+n)} = \frac{m^{z|-1}n^{p-z}}{(m+n)^p}.$$

Die Zähler dieser Wahrscheinlichkeiten sind die Productensummen der Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen n, $n+1$, $n+2$ zur $(p-2)$ten Classe, wenn man den allen gemeinschaftlichen Factor $m^{2|-1}$ ausstöfst. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$3. \quad w = \frac{m^{2|-1}}{(m+n)^p} SC'(n,\ n+1,\ n+2)^{p-2}.$$

Wird diese Untersuchung auf dem bezeichneten Wege fortgeführt, so ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit des oben aufgestellten allgemeinen Problems folgender Ausdruck:

$$4. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{(m+n)^p} SC'(n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ldots\ n+r)^{p-r}.$$

Setzt man $r = m$, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen alle weifse Kugeln erscheinen werden. Sie ist

$$5. \quad w = \frac{1^{m|1}}{(m+n)^p} SC'(n,\ n+1,\ n+2, \ldots n+m)^{p-m}.$$

Obgleich diese Gleichungen nur formell sind, so haben sie doch den Vortheil, dafs sich die in §. 28. der Combinationslehre gegebenen Entwicklungen auf sie anwenden lassen. Nach Nr. 86. pag. 63 wird aus 4.

$$6. \quad w = \frac{m^{r|-1}.\Delta^r n^p}{1^{r|1}(m+n)^p}$$

$$= \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\left[\left(\frac{n+r}{m+n}\right)^p - \frac{r}{1}\left(\frac{n+r-1}{m+n}\right)^p + \frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{n+r-2}{m+n}\right)^p - \ldots (-1)^r\left(\frac{n}{m+n}\right)^p\right].$$

Nach Nr. 89. pag. 65 der Combinationslehre geht 4. in

$$7. \quad w = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}(m+n)^p}\left[\frac{p^{r|-1}n^{p-r}}{1^{r|1}} + \frac{p^{r+1|-1}.n^{p-r-1}}{1^{2|1}1^{r-1|1}} + \frac{3r+1}{4}.\frac{p^{r+2|-1}.n^{p-r-2}}{1^{3|1}1^{r-1|1}} + \ldots\right]$$

über. Die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen alle weifse Kugeln erscheinen werden, ist aus 6. und 5.

$$8. \quad w = 1 - \frac{m}{1}\left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m+n-2}{m+n}\right)^p - \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{m+n-3}{m+n}\right)^p + \ldots$$

Die Glieder der Reihen 6. und 8. convergiren stark, wenn p einigermafsen grofs ist. Bei Ermittlung der zugehörigen Zahlenwerthe lassen sich die in §. 29. der Combinationslehre angegebenen Methoden anwenden. Für nicht sehr genaue Näherungswerthe kann man sich auch folgender Verfahren bedienen.

Es wird ohne bedeutenden Fehler in der Formel 8. $\left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^{2p}$ statt $\left(\frac{m+n-2}{m+n}\right)^p$, $\left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^{3p}$ statt $\left(\frac{m+n-3}{m+n}\right)^p$ u. s. w. gesetzt werden können. Durch Einführung dieser Werthe in 8. erhält man annähernd

$$9. \quad w = \left[1 - \left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^p\right]^m.$$

Hieraus folgt, dafs der Werth von w wächst, wenn p wächst, und dafs bei hinlänglich grofsem p der Werth von w der Gewifsheit ganz nahe kommt; wie dies bei immer weiterer Fortsetzung der Ziehungen stattfinden mufs. Die Gleichung 9. giebt daher die Möglichkeit, annäherungsweise die Zahl der Ziehungen zu bestimmen, die nöthig sind, um mit irgend einem Grade der Wahrscheinlichkeit alle weifse Kugeln erscheinen zu sehen. Es ist, nach einer einfachen Entwicklung:

$$10. \quad p = \frac{\log(1-\sqrt{w})}{\log\frac{m+n-1}{m+n}}.$$

Eben so läfst sich die Zahl der weifsen Kugeln annäherungsweise bestimmen, die man in die Urne bringen mufs, um einen bestimmten Grad der Wahrscheinlichkeit zu haben, dafs bei einer Gesammtzahl von Kugeln (s) alle weifse Kugeln in p Ziehungen erscheinen werden. Setzt man zu dem Ende $s = m+n$, so entsteht aus 9.

$$11. \quad m = \frac{\log w}{\log\left[1-\left(\frac{s-1}{s}\right)^p\right]}.$$

Sind demnach in einer Urne 100 weifse und 100 schwarze Kugeln enthalten, so mufs man nach 10. 989,6 Ziehungen machen, um 1 gegen 1 wetten zu können, dafs unter obigen Bedingungen keine weifse Kugeln mehr in der Urne zurück sein werden. Befinden sich 10 weifse und 10 schwarze Kugeln in der Urne, so sind zu dem nämlichen Zweck 52,4 Ziehungen nöthig.

Die Art, wie *Laplace* dieses Problem behandelt, sieht man No. 17. pag. 284 seiner *Théor. analyt. des probab. 3e éd. Par. 1820.*

§. 9.

In einer Urne sind m weifse und n schwarze Kugeln enthalten. Es wird $p$mal gezogen und bei jeder Ziehung eine Kugel herausgenommen. So oft eine weifse oder eine schwarze Kugel erscheint, wird sie zurück- und eine schwarze mit ihr in die Urne geworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen r weifse Kugeln erscheinen werden?

Die Anzahl der Kugeln ändert sich mit jeder Ziehung und wächst um die Einheit. Die Kugelmengen sind daher, nach der Reihenfolge der Ziehungen, $m+n$, $m+n+1$, $m+n+2$, $m+n+3$, ... $m+n+p-1$. Die Zahl der weifsen Kugeln bleibt ungeändert; die der schwarzen aber wächst gleichfalls mit jeder Ziehung um die Einheit, und ist der Reihe nach n, $n+1$, $n+2$, ... $n+p-1$. Demnach werden auch die Wahrscheinlichkeiten, in den verschiedenen Ziehungen eine weifse oder eine schwarze Kugel zu ziehen, veränderlich sein und von der in der Urne befindlichen Kugel-Anzahl abhängen. Die Wahrscheinlichkeiten, eine schwarze Kugel in der ersten, zweiten, dritten u. s. w., $p$ten Ziehung zu erhalten, werden der Reihe nach

$$1.\quad \frac{n}{m+n},\ \frac{n+1}{m+n+1},\ \frac{n+2}{m+n+2},\ \frac{n+3}{m+n+3},\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1}$$

sein. Die Wahrscheinlichkeiten, eine weifse Kugel zu erhalten, werden sein:

$$2.\quad \frac{m}{m+n},\ \frac{m}{m+n+1},\ \frac{m}{m+n+2},\ \frac{m}{m+n+3},\ \ldots\ \frac{m}{m+n+p-1}.$$

Wir erwägen zuerst die Frage: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen gerade eine weifse Kugel erscheinen werde?

Die weifse Kugel kann entweder gerade in der ersten oder in der zweiten, dritten u. s. w., oder in der letzten Ziehung erscheinen. In jeder der übrigen Ziehungen darf sofort nur eine schwarze Kugel erscheinen. Führen wir nun die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus den Formeln 1. und 2. ein, so erhalten wir folgende Zusammenstellung für die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
w = & \frac{m}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1},\\
+ & \frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1},\\
+ & \frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{m}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1},\\
+ & \frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{m}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-1}{m+n+p-1},\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ & \frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}\ \ldots\ \frac{n+p-2}{m+n+p-2}\cdot\frac{m}{m+n+p-1}.
\end{aligned}$$

Wird der allen Gliedern gemeinschaftliche Factor $\frac{m}{(m+n)^{p|1}}$ ausgeschieden, so bilden die zurückbleibenden Ausdrücke die Summen der Producte aus den Verbindungen ohne Wiederholungen zur $(p-1)$ten Classe der Elemente $n,\ n+1,\ n+3,\ \ldots\ n+p-1$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich dann folgender Ausdruck:

$$3.\quad w = \frac{m}{(m+n)^{p|1}}\, SC(n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots\ n+p-1)^{p-1}.$$

Untersuchen wir nun die Wahrscheinlichkeit, gerade zwei weifse Kugeln in p Ziehungen zu erlangen, so ergiebt sich das nämliche Schema, welches der Gleichung 3. im vorigen Paragraph vorausgeschickt wurde. Wenden wir dieses Schema auf die Formeln 1. und 2. an, so erhalten wir folgende Zusammenstellung für die fragliche Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}+\dots\frac{n+p-1}{m+n+p-1},$$
$$+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{m}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}+\dots\frac{n+p-1}{m+n+p-1},$$
$$+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{m}{m+n+3}+\dots\frac{n+p-1}{m+n+p-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n+2}{m+n+2}\cdot\frac{n+3}{m+n+3}+\dots\frac{m}{m+n+p-2}\cdot\frac{m}{m+n+p-1}.$$

Die Ausscheidung des gemeinschaftlichen Factors aus sämmtlichen Gliedern dieser Formel erzeugt Gebilde, welche die Summen der Producte aus den Verbindungen ohne Wiederholungen zur $(p-2)$ten Classe der Elemente n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... $n+p-1$ sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach für den vorliegenden Fall

$$4.\quad w = \frac{m^2}{(m+n)^{p|1}} SC(n, n+1, n+2, n+3, \dots n+p-1)^{p-2}.$$

Wir werden hierdurch auf ein leicht erkennbares allgemeines Gesetz geführt. Die Wahrscheinlichkeit des in Frage stehenden allgemeinen Problems wird durch folgende Gleichung angegeben:

$$5.\quad w = \frac{m^r}{(m+n)^{p|1}} SC(n, n+1, n+2, \dots n+p-1)^{p-r},$$

oder, wenn wir die Formel 70. §. 26. der Combinationslehre benutzen,

$$6.\quad w = \frac{m^r \partial^r n^{p|1}}{(m+n)^{p|1} 1^{r|1} (\partial n)^r}.$$

Benutzt man aber die Gleichung 73. §. 26. der Combinationslehre, so ergiebt sich

$$7.\quad w = \frac{m^r}{(m+n)^{p|1}. 1^{r|1}}[p^{r|-1}n^{p-r}+(p-1)^{r|-1}SC^1 n^{p-r-1}+(p-2)^{r|-1}SC^2 n^{p-r-2}+\dots]$$
$$(1, 2, 3, 4, \dots p-1).$$

Hier bedeuten SC^1, SC^2, SC^3, ... die Productensummen der Verbindungen ohne Wiederholungen zu der ersten, zweiten, dritten Classe u. s. w. der untergeschriebenen Elemente. Endlich erhalten wir aus 77. §. 27. der Combinationslehre folgenden Ausdruck für 5.:

$$8.\quad w = \frac{m^r}{1^{r|1}}\cdot\frac{[\log(1+\Delta)]^r n^{p|1}}{(m+n)^{p|1}}.$$

Für diese Gleichung sind die Entwicklungen von 80. pag. 54 der Combinationslehre zu berücksichtigen.

§. 10.

In einer Urne sind n, mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel grade in derjenigen Ziehung erscheinen werde, welche durch die ihr aufgeschriebene Zahl angezeigt ist?

Man sieht leicht, dafs die Zahl der günstigen Kugelgruppen mit der Anzahl der Stellen-Elemente übereinstimmt, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen von n Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden. Diese Anzahl ist in 134. §. 43. der Combinationslehre angegeben. Wird sie durch die Zahl aller möglichen Kugelgruppen $n^{p|-1}$ gemessen, so ergiebt sich folgender Werth für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$1. \quad w = \frac{p}{n} - \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}\, n^{2|-1}} + \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}\, n^{3|-1}} - \frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}\, n^{4|-1}} + \dots.$$

Werden unter den genannten Bedingungen alle Kugeln gezogen, so geht p in n über und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist aus 1.:

$$2. \quad w = 1 - \frac{1}{1^{2|1}} + \frac{1}{1^{3|1}} - \frac{1}{1^{4|1}} + \dots (-)^{n-1} \frac{1}{1^{n|1}}.$$

Bedeutet n eine etwas grofse Zahl, so geht 2. in folgende Gleichung über:

$$3. \quad w = 1 - e^{-1} = 0{,}6321205, \dots$$

Hier ist e die Zahl, deren natürlicher Logarithme die Einheit ist. Die Wahrscheinlichkeit, dafs keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werde, ist aus 2., wenn alle Kugeln gezogen werden,

$$4. \quad w = \frac{1}{1^{2|1}} - \frac{1}{1^{3|1}} + \frac{1}{1^{4|1}} - \frac{1}{1^{5|1}} + \dots (-)^{n} \frac{1}{1^{n|1}}.$$

Für ein nicht zu kleines n wird hieraus

$$5. \quad w = e^{-1} = 0{,}3678794 \dots.$$

Die Gleichungen 3. und 5. gelten schon, wenn die Zahl der in der Urne befindlichen Kugeln 20 und mehr beträgt.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade r Kugeln, nicht mehr, und nicht weniger, in der Ziehungsreihe mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werden?

Die Zahl der günstigen Gruppen leitet sich aus der Gleichung 142. §. 44. der Combinationslehre ab, wenn dort p statt q gesetzt wird. Wird durch die Zahl aller möglichen Kugelgruppen getheilt, so findet sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$6. \quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1} n^{p|-1}} \Big[(n-r)^{p-r|-1} - \frac{p-r}{1} (n-r-1)^{p-r-1|-1} + \frac{(p-r)^{2|-1}}{1^{2|1}} (n-r+2)^{p-r-2|-1} - \ldots \Big].$$

Durch Weglassung der gleichen Factoren erhält man

$$7. \quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1} n^{r|-1}} \Big[1 - \Big(\frac{p-r}{n-r}\Big)^{1|-1} + \frac{1}{1^{2|1}} \Big(\frac{p-r}{n-r}\Big)^{2|-1} - \frac{1}{1^{3|1}} \Big(\frac{p-r}{n-r}\Big)^{3|-1} + \ldots \Big].$$

Werden alle Kugeln gezogen, so ist $p = n$ und es wird hieraus

$$8. \quad w = \frac{1}{1^{r|1}} \Big[1 - 1 + \frac{1}{1^{2|1}} - \frac{1}{1^{3|1}} + \frac{1}{1^{4|1}} - \ldots (-)^{n-r-1} \frac{1}{1^{n-r|1}} \Big].$$

Ist $(n-r)$ nicht zu klein, so hat man

$$9. \quad w = \frac{1}{1^{r|1} c}.$$

Die Gleichung 6. dient, folgende Frage zu beantworten.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit den ihnen aufgeschriebenen Zahlen in p Ziehungen zusammentreffen werden?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit bestimmt sich, wenn wir aus 6. die Wahrscheinlichkeit abnehmen, dafs gerade r, $r+1$, $r+2$, ... $p-1$, p Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden. Setzen wir allmälig die genannten Werthe in 6., so erhalten wir Folgendes, nach etwas veränderter Darstellung:

$$\begin{aligned} w = & \frac{1}{n^{p|-1}} \Big[\frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} (n-r)^{p-r|-1} - \frac{p^{r+1|-1}}{1^{r|1}.1} (n-r-1)^{p-r-1|-1} + \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r|1}.1^{2|1}} (n-r-2)^{p-r-2|-1} - \ldots \Big] \\ & + \frac{1}{n^{p|-1}} \Big[\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} (n-r-1)^{p-r-1|-1} - \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+1|1}} (n-r-2)^{p-r-2|-1} + \frac{p^{r+3|-1}}{1^{r+1|1}.1^{2|1}} (n-r-3)^{p-r-3|-1} - \ldots \Big] \\ & + \frac{1}{n^{p|-1}} \Big[\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} (n-r-2)^{p-r-2|-1} - \frac{p^{r+3|-1}}{1^{r+2|1}.1} (n-r-3)^{p-r-3|-1} + \frac{p^{r+4|-1}}{1^{r+2|1}.1^{2|1}} (n-r-4)^{p-r-4|-1} - \ldots \Big] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{n^{p|-1}} \Big[\frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} (n-p+1)^{1|-1} - \frac{p^{p|-1}}{1^{p-1|1}} (n-p)^{0|-1} \Big] \\ & + \frac{1}{n^{p|-1}} \cdot \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}}. \end{aligned}$$

Sämmtliche Glieder dieses Ausdrucks sind mit der Facultät $\frac{1}{n^{p|-1}}$ verbunden. Lassen wir dieselbe vorerst unberücksichtigt und beachten die in den Klammern eingeschlossenen Reihen, so lassen sich dieselben in schiefliegender Richtung zusammenzählen. Dabei ist nur nöthig, die begleiten-

den Facultäten von p zu gleichen Dimensionen zu ergänzen. Dies giebt folgende Umformungen:

$$\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}}(n-r-1)^{p-r-1|-1}\left[1-\frac{r+1}{1}\right] = -\frac{r}{1}\cdot\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}}(n-r-1)^{p-r-1|-1},$$

$$\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1}\left[1-\frac{r+2}{1}+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\right]$$
$$= \frac{r(r+1)}{1.2}\cdot\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1},$$

$$\frac{p^{r+3|-1}}{1^{r+3|1}}(n-r-3)^{p-r-3|-1}\left[1-\frac{r+3}{1}+\frac{(r+2)(r+3)}{1.2}-\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}\right]$$
$$= -\frac{r^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{p^{r+3|-1}}{1^{r+3|1}}(n-r-3)^{p-r-3|-1}$$

u. s. w. Die in Klammern eingeschlossenen Facultäten von r unterliegen folgendem Gesetze:

$$1-\frac{r+s}{1}+\frac{(r+s)^{2|-1}}{1^{2|1}}-\frac{(r+s)^{3|-1}}{1^{3|1}}+\dots(-)^x\frac{(r+s)^{x|-1}}{1^{x|1}} = (-)^x\frac{(r+s-1)^{x|-1}}{1^{x|1}}.$$

Daraus erhalten wir folgenden Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$10.\quad w = \frac{1}{n^p}\left[\frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}(n-r)^{p-r|-1}-\frac{r}{1}\cdot\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}}(n-r-1)^{p-r-1|-1}\right.$$
$$\left.+\frac{r^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}}(n-r-2)^{p-r-2|-1}-\dots\right],$$

oder in anderer Darstellung:

$$11.\quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}.n^{r|-1}}\left[1-\frac{r}{r+1}\cdot\frac{p-r}{n-r}+\frac{r}{1^{2|1}(r+2)}\left(\frac{p-r}{n-r}\right)^{2|-1}\right.$$
$$\left.-\frac{r}{1^{3|1}(r+3)}\left(\frac{p-r}{n-r}\right)^{3|-1}+\dots\right].$$

Werden alle Kugeln gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit den ihnen aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden,

$$12.\quad w = \frac{1}{1^{r-1|1}}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}+\frac{1}{1.2(r+2)}-\frac{1}{1.2.3(r+3)}+\dots\right].$$

Nun läfst sich auch die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dafs höchstens r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen in p Ziehungen zusammentreffen werden. Zu dem Ende ist 11. von der Einheit abzuziehen und dann $(r+1)$ statt r zu setzen. Dies giebt

$$13.\quad w = 1-\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}.n^{r+1|-1}}\left[1-\frac{r+1}{r+2}\cdot\frac{p-r-1}{n-r-1}+\frac{(r+1)}{1^{2|1}(r+3)}\left(\frac{p-r-1}{n-r-1}\right)^{2|1}\right.$$
$$\left.-\frac{(r+1)}{1^{3|1}(r+3)}\left(\frac{p-r-1}{n-r-1}\right)^{3|-1}+\dots\right].$$

Endlich leitet sich auch aus 11. die Wahrscheinlichkeit ab, dafs in p Ziehungen wenigstens r, und höchstens s Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden. Die Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit beruht nämlich darauf, dafs entweder gerade r, oder $r+1$, oder $r+2$, ..., oder s Kugeln mit ihren Zahlen zusammentreffen. Es ist demnach in 11. $s+1$ statt r zu setzen und das erhaltene Resultat von 11. abzuziehen. Dies giebt

$$14. \quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1} n^{r|-1}} \left[1 - \frac{r}{r+1} \cdot \frac{p-r}{n-r} + \frac{r}{1^{2|1}(r+2)} \left(\frac{p-r}{n-r}\right)^{2|-1} - \frac{r}{1^{3|1}(r+3)} \left(\frac{p-r}{n-r}\right)^{3|-1} + \ldots\right]$$
$$- \frac{p^{s+1|-1}}{1^{s+1|1} . n^{s+1|-1}} \left[1 - \frac{s+1}{s+2} \cdot \frac{p-s-1}{n-s-1} + \frac{s+1}{1^{2|1}(s+3)} \left(\frac{p-s-1}{n-s-1}\right)^{2|-1} - \frac{s+1}{1^{3|1}(s+4)} \left(\frac{p-s-1}{n-s-1}\right)^{3|-1} + \ldots\right],$$

§. 11.

In einer Urne sind m Arten von Kugeln enthalten. Jede Art enthält gleich viele Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnet sind. Es werden p Kugeln einzeln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel mit ihrer aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde?

Die günstigen Kugelgruppen kommen mit den Stellen-Elementen überein, die entstehen, wenn die Versetzungen aus m gleich grofsen Elementenreihen zur $p$ten Classe gebildet werden. Diese Zahl ist in 146. §. 45. der Combinationslehre angegeben. Man hat dort p statt q und m statt p zu setzen. Wird durch die Zahl aller möglichen Kugelgruppen gemessen, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgender Ausdruck:

$$1. \quad w = \frac{mp}{mn} - \frac{m^2 p^{2|-1}}{1^{2|1}(mn)^{2|-1}} + \frac{m^3 p^{3|-1}}{1^{3|1}(mn)^{3|-1}} - \frac{m^4 p^{4|-1}}{1^{4|1}(mn)^{4|-1}} + \ldots$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied negativ werden oder in 0 übergehen sollte. Werden n Ziehungen gemacht, so wird $p = n$ und es ist

$$2. \quad w = 1 - \frac{m^2}{1^{2|1}} \left(\frac{n}{mn}\right)^{2|-1} + \frac{m^3}{1^{3|1}} \left(\frac{n}{mn}\right)^{3|-1} - \frac{m^4}{1^{4|1}} \left(\frac{n}{mn}\right)^{4|-1} + \ldots$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für die erste Ziehungsreihe, sondern auch nach §. 7. für jede spätere Reihe, worin n Ziehungen gemacht werden; vorausgesetzt, dafs die Beschaffenheit der gezogenen Kugeln nicht bekannt ist.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen gerade r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden?

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich aus 151. §. 46. der Combinationslehre. Sie ist

$$3.\quad w = \frac{p^{r|-1}m^r}{1^{r|1}(mn)^{r|-1}}\left[1 - \frac{m}{1}\left(\frac{p-r}{m-r}\right)^{1|-1} + \frac{m^2}{1^{2|1}}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{2|-1} - \frac{m^3}{1^{3|1}}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{3|-1} + \ldots\right].$$

Mit Hülfe dieser Gleichung sind wir im Stande folgende Frage zu beantworten. Wie grofs ist unter den genannten Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen zusammentreffen werden?

Wenden wir das nämliche Verfahren an, welches in §. 10. zu der Gleichung 10. führte, so ergiebt sich folgende Bestimmung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Man findet

$$4.\quad w = \frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\left(\frac{p}{mn}\right)^{r|-1}\left[1 - \frac{rm}{r+1}\cdot\frac{p-r}{mr-r} + \frac{rm^2}{1^{2|1}(r+2)}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{2|-1} - \frac{rm^3}{1^{3|1}(r+3)}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{3|-1} + \ldots\right].$$

Auf gleiche Weise wie in §. 10. ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, dafs höchstens r, also entweder r, oder $r-1$, oder $r-2$, ... oder 1, oder keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werde:

$$5.\quad w = 1 - \frac{m^{r+1}}{1^{r+1|1}}\left(\frac{p}{mn}\right)^{r+1|-1}\left[1 - \frac{(r+1)m}{r+2}\left(\frac{p-r-1}{mn-r-1}\right) + \frac{(r+1)m^2}{1^{2|1}(r+3)}\cdot\left(\frac{p-r-1}{mn-r-1}\right)^{2|-1} - \frac{(r+1)m^3}{1^{3|1}(r+4)}\cdot\left(\frac{p-r-1}{mn-r-1}\right)^{3|-1} + \ldots\right].$$

Aus 4. ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den genannten Bedingungen wenigstens r und höchstens s Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen in p Ziehungen zusammentreffen werden. Sie ist

$$6.\quad w = \frac{m^r}{1^{r|1}}\left(\frac{p}{mn}\right)^{r|-1}\left[1 - \frac{rm}{r+1}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right) + \frac{rm^2}{1^{2|1}(r+2)}\left(\frac{p-r}{mn-r}\right)^{2|-1} - \ldots\right] - \frac{m^{s+1}}{1^{s+1|-1}}\left(\frac{p}{mn}\right)^{s+1|-1}\left[1 - \frac{(s+1)m}{s+2}\left(\frac{p-s-1}{mn-s-1}\right) + \frac{m^2(s+1)}{1^{2|1}(s+3)}\left(\frac{p-s-1}{mn-s-1}\right)^{2|-1} - \ldots\right] {}^{*)}.$$

---

*) In diesem und dem vorhergehenden Paragraph haben wir der Kürze wegen $\left(\frac{a}{b}\right)^{x|-1}$ statt $\frac{a^{x|-1}}{b^{x|-1}} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-x+1)}{b(b-1)(b-2)\ldots(b-x+1)}$ geschrieben, und werden auch künftig diese Beziehungsart beibehalten.

Die in diesem Paragraph gefundenen Gleichungen lassen sich auf sehr einfache Ausdrücke bringen, wenn sehr grofse Zahlen vorkommen und die *näherungsweise* Werthbestimmung genügt. In diesen Fällen können die Gleichungen aus der Combinationslehre pag. 112 u. ff. angewendet werden.

Wird in der Gleichung 2. für n eine etwas grofse Zahl angenommen, so können statt der Facultäten von n und mn ohne bedeutenden Fehler die entsprechenden Potenzen gesetzt werden und die Gleichung geht in folgende über:

$$7. \quad w = 1 - \frac{1}{1^{2|1}} + \frac{1}{1^{3|1}} - \frac{1}{1^{4|1}} - \ldots = 1 - e^{-1}.$$

Wenden wir die nämliche Bemerkung auf die Gleichungen 3. und 4. an, so ergiebt sich, dafs sich die Wahrscheinlichkeiten der in diesem Paragraph betrachteten Fälle denen des vorhergehenden Paragraphen nähern; und das um so mehr, je gröfser n wird. Die Werthe der Wahrscheinlichkeiten werden im Allgemeinen um so kleiner sein, je kleiner die Zahl der Ziehungen ist und je weniger Kugel-Arten bei einerlei n vorkommen; sie werden um so gröfser sein, je gröfser die Anzahl der Ziehungen ist und je mehr Kugel-Arten bei einerlei n vorkommen. Die Wahrscheinlichkeiten, welche bei mehreren Kugel-Arten in Frage stehen, werden sich denen, bei einer Kugel-Art um so mehr nähern, je gröfser die Zahl der Kugeln, welche in jeder Art vorkommen, im Verhältnifs zu der Zahl der Kugel-Arten ist, oder je gröfser n im Verhältnifs zu m ist.

Bei den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten treten die umgekehrten Verhältnisse ein. Die Werthe 3. und 5. §. 7. bilden demnach die Grenzen, um welche die Wahrscheinlichkeiten schwanken und von welchen sie sich mehr oder weniger entfernen.

Zieht man nun aus einer Urne, welche vier Kugel-Arten enthält, von denen die Kugeln jeder Art mit den Zahlen 1, 2, 3, ... 8 bezeichnet sind, acht Kugeln einzeln heraus, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine mit der aufgeschriebenen Nummer zusammentreffen werde, nach 2.:

$$w = 1 - \frac{4^2 . 8^{2|-1}}{1^{2|1} . 32^{2|-1}} + \frac{4^3 . 8^{3|-1}}{1^{3|1} . 32^{3|-1}} - \ldots = 0{,}650258 \ldots$$

Werden aus einer Urne, die nur acht, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... 8 bezeichnete Kugeln enthält, alle einzeln herausgenommen, so ist die Wahr-

scheinlichkeit, die aufgeschriebene Nummer einer Kugel mit der Ordnungszahl der Ziehung übereinstimmen zu sehen,

$$w = 1 - \frac{1}{1^{2|1}} + \frac{1}{1^{3|1}} - \frac{1}{1^{4|1}} - \dots \frac{1}{1^{8|1}} = 0{,}632118055\dots$$

Merkwürdig ist es, dafs die Werthe der Wahrscheinlichkeiten bei zunehmender Kugelzahl, und bei gleichförmig zunehmender Zahl der Ziehungen, nicht regelmäfsig steigen oder fallen, sondern um die in §. 10. 3. und 5. angegebenen Grenzwerthe hin und her schwanken, und regelmäfsig, abwechselnd, bald gröfser, bald kleiner als diese Werthe sind. Werden nämlich aus einer Urne, die 1, oder 2, oder 3, oder 4 Kugeln von einer Art u. s. w. enthält, jedesmal alle gezogen, so sind die Wahrscheinlichkeiten, dafs wenigstens eine mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werde,

8. $w_1 = 1,\quad w_2 = \frac{1}{2},\quad w_3 = \frac{2}{3},\quad w_4 = \frac{5}{8},\quad w_5 = \frac{19}{30},\quad w_6 = \frac{91}{144},\ \dots$

Für die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten verhält es sich auf entgegengesetzte Weise; nemlich es ist

9. $w_1 = 0,\quad w_2 = \frac{1}{2},\quad w_3 = \frac{1}{3},\quad w_4 = \frac{3}{8},\quad w_5 = \frac{11}{30},\quad w_6 = \frac{53}{144},\ \dots$

Dies scheint *Laplace* übersehen zu haben, wenn er pag. 223. *Théor analyt. d. probab.* behauptet, dafs in 9. die Wahrscheinlichkeiten wachsen, wenn n wächst. Die Prämissen, worauf er seine Schlüsse gründete, scheinen für den Fall, welchen er behandelte, und für welchen er Schlüsse ziehen wollte, nicht zulässig. Bei unveränderlichem m und n wachsen in der Gleichung 1. dieses Paragraphen und in 1. §. 10. die Werthe der Wahrscheinlichkeiten, wenn p wächst.

Das vorliegende Problem hat *Laplace* in seinem eben angeführten Werke Nr. 9. behandelt. Er hat die Gleichungen 1. und 3. entwickelt. Das Problem in 10. hat *Euler* in *Hist. de l'Académie roy. d. sciences et bell. lett. 1752. pag. 255* u. ff. behandelt. Er hat die Gleichungen 2. 3. und 5. entwickelt und auf mehrere besondere Fälle angewendet. Seine Entwicklungsart ist etwas weitläufig. Auf Seite 270 geht *Euler* von der unrichtigen Ansicht aus, dafs sich die in §. 10. entwickelten Gleichungen auf die in diesem Paragraph behandelten Fälle anwenden liefsen.

Heben wir in den Ausdrücken 4. 5. und 6. die Zähler heraus, so beantworten sie Probleme aus der Combinationslehre. Im ersten Fall

wird die Anzahl der Gruppen bestimmt, in welchen wenigstens r Elemente auf der zugehörigen Stelle erscheinen, wenn die Versetzungen ohne Wiederholungen aus m Elementenreihen zur $p$ten Classe gebildet werden, von denen jede n Elemente hat. Behalten wir die in der Combinationslehre angenommene Bezeichnungsweise bei, so ist

$$10.\quad S+[r, r+1, r+2, \ldots. p;\, a_1, a_2, \ldots. a_n;\, b_1, b_2, \ldots. b_n;\, \ldots. m_1, m_2, \ldots. m_n]^p$$
$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} m^r (mn-r)^{p-r|-1} - \frac{r}{1}\cdot\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} m^{r+1}(mn-r-1)^{p-r-1|-1}$$
$$+\left(\frac{r}{1}\right)^{2|1} \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} m^{r+2}(mn-r-2)^{p-r-2|-1} - \ldots.$$

Im zweiten Falle wird unter den nämlichen Bedingungen die Zahl der Gruppen bestimmt, die höchstens r Elemente an der zugehörigen Stelle haben. Es ist

$$11.\quad S+[0, 1, 2, \ldots. r;\, a_1, a_2, \ldots. a_n;\, b_1, b_2, \ldots. b_n;\, \ldots. m_1, m_2, \ldots. m_n]^p$$
$$= (mn)^{p|p-1} - \frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} m^{r+1}(mn-r-1)^{p-r-1|-1}$$
$$+ \frac{r+1}{1}\cdot\frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} m^{r+2}(mn-r-2)^{p-r-2|-1} - \ldots.$$

Im dritten Falle wird die Zahl der Gruppen bestimmt, in welchen unter den genannten Bedingungen wenigstens r und höchstens s Elemente auf der zugehörigen Stelle erscheinen. Sie ist

$$12.\quad S+[r, r+1, \ldots. s;\, a_1, a_2, \ldots. a_n;\, b_1, b_2, \ldots. b_n;\, \ldots. m_1, m_2, \ldots. m_n]^p$$
$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} m^r (mn-r)^{p-r} - \frac{r}{1}\cdot\frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} m^{r+1}(mn-r-1)^{p-r-1|-1}$$
$$+\left(\frac{r}{1}\right)^{2|1} \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} m^{r+2}(mn-r-2)^{p-r-2|-1} - \ldots.$$
$$-\frac{p^{s+1|-1}}{1^{s+1|1}} m^{s+1}(mn-s-1)^{p-s-1|-1} + \frac{s+1}{1}\cdot\frac{p^{s+2|-1}}{1^{s+2|1}} m^{s+2}(mn-s-2)^{p-s-2|-1}$$
$$-\left(\frac{s+1}{1}\right)^{2|1} \frac{p^{s+3|-1}}{1^{s+3|1}} m^{s+3}(mn-s-3)^{p-s-3|-1} + \ldots.$$

Soll die Zahl der Stellen-Elemente für die vorliegenden Probleme bestimmt werden, wenn nur eine Elementenreihe vorhanden ist, so ergiebt sie sich leicht, wenn in den eben gefundenen Formeln $m = 1$ gesetzt wird. Die Gleichungen 10. 11. und 12. beantworten die Probleme, worauf §. 44. und 46. der Combinationslehre aufmerksam machen.

§. 12.

In einer Urne sind m, in einer andern n Kugeln enthalten. Aus jeder wird eine willkürliche Anzahl von Kugeln herausgenommen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus jeder Urne gerade p Kugeln gezogen werden?

Aus der Urne, welche m Kugeln enthält, können $\frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}$ Gruppen genommen werden, von denen jede p Kugeln enthält. Aus der zweiten können $\frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}$ solcher Gruppen hervorgehen. Jede einzelne Kugelgruppe, die aus der ersten Urne gezogen wird, kann sich mit allen, die aus der Urne gezogen werden, der Reihe nach verbinden und der Aufgabe genügen. Die Zahl der günstigen Fälle ist daher

$$1.\quad A = \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Die Kugelgruppen, welche aus der ersten Urne, die m Kugeln enthält, hervorgehen können, werden entweder eine, oder zwei, oder drei u. s. w., oder m Kugeln zählen. Die Bestimmung der, sämmtlichen Fällen zugehörigen Gruppen-Anzahlen führt zu folgendem Ausdruck:

$$A_1 = \frac{m}{1} + \frac{m^{2|-1}}{2^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} = (1+1)^m - 1.$$

Eben so ergiebt sich für die Zahl aller möglichen Kugelgruppen, die aus der zweiten Urne hervorgehen können:

$$A_2 = \frac{n}{1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} = (1+1)^n - 1.$$

Sämmtliche in A_1 und A_2 enthaltene Kugelgruppen können sich miteinander verbinden. Die Zahl aller möglichen Fälle ist daher

$$2.\quad A_{m+n} = (2^m - 1)(2^n - 1).$$

Aus 1. und 2. ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$3.\quad w = \frac{m^{p|-1} n^{p|-1}}{1^{p|1} . 1^{p|1} (2^m - 1)(2^n - 1)}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus beiden Urnen gleichzeitig gleichviel Kugeln gezogen werden?

Die günstigen Fälle sind folgende. Es werden entweder eine, oder zwei, oder drei u. s. w., oder n Kugeln gleichzeitig aus beiden Urnen ge-

zogen, wobei n kleiner als m angenommen wird. Die Zahl der günstigen Fälle ist nach den vorstehenden Erörterungen zu No. 1.:

$$A = \frac{n}{1}\cdot\frac{m}{1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots\ldots \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}\cdot\frac{m^{n|-1}}{1^{n|1}}.$$

Wenden wir auf diesen Ausdruck die in §. 142. und 143. pag. 257 u. ff. m. Differenzencalculs gemachten Bemerkungen an, so geht die Zahl in folgende über:

$$A = \frac{(m+n)^{n|-1}}{1^{n|1}} - 1.$$

Wird dieser Ausdruck durch die Zahl aller möglichen Fälle nach 2. gemessen, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$4.\quad w = \frac{(m+n)^{n|-1}}{1^{n|1}(2^m-1)(2^n-1)} - \frac{1}{(2^m-1)(2^n-1)}.$$

Ist die Kugel-Anzahl in beiden Urnen gleich, also $n=m$, so ergiebt sich hieraus

$$5.\quad w = \frac{(2m)^{2m|-1}}{1^{m|1}\,1^{m|1}(2^m-1)^2} - \frac{1}{(2^m-1)^2}.$$

Ist die Kugel-Anzahl in beiden Urnen sehr grofs, so erhalten wir nach §. 143. pag. 259 des Differenzencalculs

$$6.\quad w = \frac{1.3.5.7\ldots.(2m-1)}{2.4.6.8\ldots.2m}.$$

Da nun bekanntlich bei sehr grofsem m, näherungsweise

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots.2m.2m}{1.3.3.5.5.7\ldots.(2m-1)(2m+1)}$$

ist, so ergiebt sich hieraus leicht folgende Gleichung:

$$w = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}\pi(2m+1))}},$$

oder, da bei sehr grofsem m, $2m$ statt $2m\pi$ gesetzt werden kann,

$$7.\quad w = \frac{1}{\sqrt{(\pi m)}}.$$

π ist das Verhältnifs des Durchmessers zur Peripherie des Kreises. Aus 7. folgt, dafs die gesuchte Wahrscheinlichkeit sich verkleinert, je gröfser die Zahl der Kugeln wird.

Erheben zwei Personen gleichzeitig und auf's Gerathewohl 1, 2, 3, oder 4 Finger, so ist nach 4. die Wahrscheinlichkeit, dafs beide die gleiche Zahl treffen werden, $\frac{69}{225} = 0{,}30622\ldots$, also beinahe $\frac{1}{3}$.

Von zwei Urnen enthält jede m Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnet sind. Man zieht gleichzeitig p Kugeln aus jeder Urne. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die gleichen Zahlen tragen?

Die Zahl der verschiedenen Fälle, in welchen p Kugeln aus der einen Urne genommen werden können, ist

$$8.\quad A = \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Jeder einzelne Fall, der bei dem Ziehen aus der einen Urne möglich ist, kann mit demselben, der bei dem Ziehen aus der andern möglich ist, nur einmal zusammentreffen. Die Zahl aller günstigen Fälle ist demnach unter dem vorstehenden Ausdrucke begriffen. Die Zahl aller möglichen Fälle ergiebt sich aus 1., wenn $n = m$ gesetzt wird. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$9.\quad w = \frac{1^{p|1}}{m^{p|-1}}.$$

Es wird unter den nämlichen Bedingungen gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus beiden Urnen gleich viele und mit den nämlichen Zahlen bezeichnete Kugeln erscheinen werden?

Es können entweder eine, oder zwei, oder drei u. s. w., oder m Kugeln aus jeder Urne gezogen werden, welche die gleichen Zahlen tragen. Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich, wenn 1, 2, 3, ... m in 8. statt p gesetzt wird. Sie ist

$$A = m + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} = 2^m - 1.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle giebt 2., wenn m statt n gesetzt wird. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$10.\quad w = \frac{1}{2^m - 1}.$$

Sind drei Urnen vorhanden, und werden p Kugeln gleichzeitig aus jeder herausgenommen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sie die gleichen Zahlen tragen werden:

$$w = \frac{1^{p|1} \cdot 1^{p|1}}{m^{p|-1} \cdot m^{p|-1}}.$$

Hieraus ergiebt sich allgemein, wenn r Urnen vorhanden sind, für die Wahrscheinlichkeit, dafs p gleichzeitig aus jeder Urne gezogene Kugeln dieselben Zahlen tragen werden:

$$11. \quad w = \frac{(1^{p|1})^{r-1}}{(m^{p|-1})^{r-1}}.$$

Eben so ergiebt sich allgemein aus 10. für die Wahrscheinlichkeit, dafs überhaupt die gleiche Anzahl gleichbezeichneter Kugeln erscheinen werde, wenn aus r Urnen gezogen und aus jeder willkürlich irgend eine Anzahl Kugeln genommen wird:

$$12. \quad w = \frac{1}{(2^m - 1)^{r-1}}.$$

Es ist nicht eine nothwendige Bedingung, dafs die Anzahlen von Kugeln in den verschiedenen Urnen gleich sind. Sie können auch ungleich sein. Für diesen Fall gehen die Gleichungen 11. und 12. in folgende über:

$$13. \quad w = \frac{(1^{p|1})^{s-1}}{m_2^{p|-1}.m_3^{p|-1}.m_4^{p|-1}\ldots.m_r^{p|-1}},$$

$$14. \quad w = \frac{1}{(2^{m_2}-1)(2^{m_3}-1)(2^{m_4}-1)\ldots.(2^{m_r}-1)},$$

wenn m_1 die kleinste Kugel-Anzahl bedeutet.

In einer Urne sind m Kugeln enthalten. A nimmt irgend eine Anzahl von Kugeln heraus, und B ruft gleichzeitig irgend eine Zahl, die kleiner als $m+1$ ist, aus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs beide die gleiche Zahl getroffen haben werden?

Die Wahrscheinlichkeit beruht darauf, dafs A jede beliebige Zahl von Kugeln, also 1, 2, 3, ... m ziehen kann. Die Zahl der günstigen Fälle ist, nach den zu 2. vorausgeschickten Bemerkungen:

$$A = m + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots. \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} = 2^m - 1.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist aus den nämlichen Gründen $2^m - 1$. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist daher $w = 1$, und wird also zur *Gewifsheit.* Die Wahrscheinlichkeit, dafs B eine bestimmte, unter m möglichen Zahlen treffen werde, ist $\frac{1}{m}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$15. \quad w = \frac{1}{m}.$$

§. 13.

In einer Urne befinden sich m Kugeln. Jemand nimmt aufs Gerathewohl eine Anzahl Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die herausgenommene Anzahl von Kugeln gerade, und wie grofs, dafs sie ungerade sein werde?

Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine gerade Anzahl von Kugeln erscheinen werde, beruht darauf, dafs entweder zwei, vier, oder sechs Kugeln u. s. w. gezogen werden. Die günstigen Fälle sind

$$A_1 = \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} + \frac{m^{6|-1}}{1^{6|1}} + \dots.$$

Soll eine ungerade Anzahl von Kugeln, also eine, drei, fünf u. s. w. gezogen werden, so ist die Zahl der günstigen Fälle

$$A_2 = \frac{m}{1} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \frac{m^{5|-1}}{1^{5|1}} + \dots.$$

Nun ist

$$1. \quad 2^m = 1 + m + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots. \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}},$$

$$2. \quad 0 = (1-1)^m = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} - \dots. (-)^m \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}}.$$

Wird 1. und 2. zusammengezählt, von der erhaltenen Summe die Zahl 2 abgezogen und dann das Resultat durch 2 gemessen, so entsteht

$$3. \quad A_1 = \tfrac{1}{2}\left(2 + 2.\frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + 2.\frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} + \dots. - 2\right) = \frac{2^m - 2}{2} = 2^m - 1.$$

Wird die Gleichung 2. von 1. abgezogen und das erhaltene Resultat durch 2 gemessen, so ist

$$4. \quad A_2 = \tfrac{1}{2}\left(2m + 2.\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + 2.\frac{m^{5|-1}}{1^{5|1}} + \dots.\right) = \frac{2^m}{2} = 2^{m-1}.$$

Die Zahl der möglichen Fälle ist nach den Vorbemerkungen zu 2. §. 12. $A = 2^m - 1$. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine gerade Anzahl von Kugeln gezogen werden wird,

$$5. \quad w = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1};$$

die Wahrscheinlichkeit, dafs eine ungerade Anzahl von Kugeln gezogen werden wird, ist

$$6. \quad w = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}.$$

Diese Wahrscheinlichkeiten nähern sich immer mehr der Gleichheit, je gröfser m wird, und der Unterschied wird immer unbedeutender. Bei kleinen m ist der Unterschied bedeutender.

In einer Urne sind m schwarze und n weifse Kugeln enthalten. Man nimmt eine gerade Anzahl von Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von jeder Farbe gleich viele Kugeln erscheinen werden?

Dies wird geschehen, wenn eine weifse und eine schwarze, zwei weifse und zwei schwarze Kugeln u. s. w. erscheinen. Die Zahl der günstigen Fälle ist, wie aus den Bemerkungen zu 4. §. 12. erhellet:

$$7.\quad A_1 = m.n + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots = \frac{(m+n)^{n|-1}}{1^{n|1}} - 1.$$

Hier ist $n < m$. Die Zahl aller möglichen Fälle ist

$$8.\quad A_2 = \frac{(m+n)^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{(m+n)^{4|-1}}{1^{4|1}} + \frac{(m+n)^{6|-1}}{1^{6|1}} + \dots = \frac{2^{m+n}-2}{2} = 2^{m+n-1} - 1;$$

wie sich aus 3. ergiebt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$9.\quad w = \frac{(m+n)^{n|-1}-1}{1^{n|1}(2^{m+n-1}-1)}.$$

Enthält die Urne gleich viele weifse und schwarze Kugeln, so geht der vorstehende Ausdruck in folgenden über:

$$10.\quad w = \frac{2m(2m-1)(2m-2)\dots 3.2.1}{(1.2.3\dots m)^2(2^{2m-1}-1)} - \frac{1}{2^{2m-1}-1}.$$

Nach den Gleichungen 5. und 6. §. 12. erhalten wir für sehr grofse m:

$$11.\quad w = \frac{2}{\sqrt{(\pi m)}}.$$

Der Werth der gefundenen Wahrscheinlichkeit ist doppelt so grofs als der in 7. §. 12. gefundene.

Es sind die nämlichen Bedingungen wie oben gegeben. Man nimmt nach Willkür eine gerade Zahl von Kugeln heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von jeder Farbe gleich viele und gleich bezeichnete Kugeln erscheinen werden?

Nach den Bemerkungen zu 10. §. 12. ist die Zahl der günstigen Fälle

$$12.\quad A = m + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} + \dots = 2^m - 1;$$

die Zahl aller möglichen Fälle ist in Nr. 8. dieses Paragraphen angegeben.

Die Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$13. \quad w = \frac{2^m - 1}{2^{m+n-1} - 1}.$$

Für sehr grofse m wird

$$14. \quad w = \frac{1}{2^{n-1}}$$

zu setzen sein.

Die Gleichungen dieses und des vorhergehenden Paragraphs hängen ihrem Inhalte nach zusammen und sind deshalb hier zusammengestellt. Das erste Problem dieses Paragraphs ist nach *Lacroix* (Wahrscheinlichkeits-Rechnung §. 43.) von *Bertrand* und dann von *Laplace* in *Théor. analyt. d. probab. Nr. 5.* behandelt. Dort findet sich aufserdem auch noch die Gleichung 11. dieses Paragraphs entwickelt.

(Die Fortsetzung folgt.)

17.

Bemerkungen über die cubische Gleichung, durch welche die Haupt-Axen der Flächen zweiten Grades bestimmt werden.

(Von Hrn. Dr. *E. E. Kummer*, Professor in Breslau.)

Die Aufgabe, eine homogene ganze Function zweiten Grades von drei Variabeln durch lineäre Substitutionen in eine solche zu verwandeln, in welcher die drei Producte der Variabeln fehlen, kommt bekanntlich in der Analysis und in ihren Anwendungen auf Geometrie und Mechanik häufig vor, und ist darum auch schon vielfältig behandelt worden. Dafs die cubische Gleichung, von welcher die Lösung abhängt, immer drei reale Wurzeln hat, ist auch schon auf mehrere Arten bewiesen worden; die directeste Beweis-Art aber, nämlich den algebraischen Ausdruck, von dessen Vorzeichen es abhängt, ob die cubische Gleichung drei oder eine reale Wurzel hat, als eine Summe von Quadraten darzustellen, wodurch das Vorzeichen vollständig bestimmt wird, hat man bisher noch nicht versucht. Diese Zerfällung in Quadrate werde ich in Folgendem mittheilen, und zugleich den Fall, wo zwei Wurzeln der Gleichung einander gleich sind, über welchen, namentlich wenn imaginäre Coëfficienten zugelassen werden, noch einige Unklarheiten herrschen, in ein helleres Licht zu stellen suchen.

Wenn der Ausdruck $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy$ durch die Substitution

$$x = ax'+a'y'+a''z',$$
$$y = bx'+b'y'+b''z',$$
$$z = cx'+c'y'+c''z',$$

wo

$$a^2+b^2+c^2 = 1, \qquad aa'+bb'+cc' = 0,$$
$$a'^2+b'^2+c'^2 = 1, \qquad aa''+bb''+cc'' = 0,$$
$$a''^2+b''^2+c''^2 = 1, \qquad a'a''+b'b''+c'c'' = 0$$

ist, auf die Form $A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2$ gebracht werden soll, so sind bekanntlich $A = A'$, $A = B'$, $A = C'$ die drei Wurzeln der Gleichung

$$A^3 - (A + B + C)A^2 + (AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2)A$$
$$- (ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2) = 0;$$

welche auch in folgenden Formen dargestellt werden kann:

$$(A-A)(A-B)(A-C) - D^2(A-A) - E^2(A-B) - F^2(A-C) - 2DEF = 0,$$

$$\frac{EF}{D(A-A)+EF} + \frac{DF}{E(A-B)+DF} + \frac{DE}{F(A-C)+DE} - 1 = 0.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$P = A + B + C,$$
$$Q = AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2,$$
$$R = ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2,$$

so ist die bekannte Bedingung, dafs die cubische Gleichung $A^3 - PA^2 + QA - R = 0$ zwei gleiche Wurzeln habe, folgende:

$$P^2Q^2 - 4P^3R + 18PQR - 4Q^3 - 27R^2 = 0.$$

Ist dieser Ausdruck aber nicht gleich Null, sondern positiv, so hat die cubische Gleichung drei verschiedene reale Wurzeln, und ist er negativ, nur eine reale Wurzel. Substituirt man nun für P, Q und R die obigen Werthe, so findet man, nach gehöriger Anordnung der Glieder, dafs der Ausdruck nicht sowohl die Gröfsen A, B, C selbst, sondern nur deren Differenzen enthält, oder dafs er ungeändert bleibt, wenn man zugleich alle drei Gröfsen A, B und C um dieselbe Gröfse vermehrt oder vermindert. Dies ist auch aus dem blofsen Anblicke der cubischen Gleichung in der zweiten oder dritten Form klar, weil durch diese Aenderung die drei Wurzeln der Gleichung um diese Gröfse vermehrt oder vermindert werden. Ich setze also Kürze wegen

$$B - C = \alpha, \quad C - A = \beta, \quad A - B = \gamma,$$

wodurch $\alpha + \beta + \gamma = 0$ wird, und ordne die Formel nach den Dimensionen von D, E, F, wodurch sie folgende Gestalt bekommt:

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 + 2\beta\gamma(\alpha^2 + 2\beta\gamma)D^2 + 2\alpha\gamma(\beta^2 + 2\alpha\gamma)E^2 + 2\alpha\beta(\gamma^2 + 2\alpha\beta)F^2$$
$$+ 4(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)DEF$$
$$+ (\alpha^2 + 8\beta\gamma)D^4 + (\beta^2 + 8\alpha\gamma)E^4 + (\gamma + 8\alpha\beta)F^4 + 2(10\alpha^2 - \beta\gamma)E^2F^2$$
$$+ 2(10\beta^2 - \alpha\gamma)D^2F^2$$
$$+ 2(10\gamma^2 - \alpha\beta)D^2E^2 - 36DEF((\beta-\gamma)D^2 + (\gamma-\alpha)E^2 + (\alpha-\beta)F^2)$$
$$+ 4(D^2 + E^2 + F^2)^3 - 108D^2E^2F^2 = 0.$$

Dies ist nun der Ausdruck, welcher als eine Summe von Quadraten dargestellt werden soll. Man wird wohl kaum erwarten, dafs zu diesem Zwecke eine directe Methode gefunden und angewendet werden solle, da eine solche schwerlich zu finden sein möchte; es bleibt also nichts übrig, als durch Versuche die gewünschte Form zu ermitteln. Ich habe diese Versuche so eingerichtet, dafs ich die Zerlegung in Quadrate zunächst für besondere Werthe von α, β, γ, D, E, F ausführte; für welche die Formel sich bedeutend vereinfacht. Ein solcher Fall ist der, wo $\alpha=\beta=\gamma=0$ ist, in welchem die Formel

$$4(D^2+E^2+F^2)^3-108D^2E^2F^2=0$$

in Quadrate zu zerlegen ist. Für sie findet man ohne grofse Schwierigkeit folgende Form:

$$15D^2(E^2-F^2)^2+15E^2(F^2-D^2)^2+15F^2(D^2-E^2)^2+D^2(2D^2-E^2-F^2)^2 \\ +E^2(2E^2-F^2-D^2)^2+F^2(2F^2-D^2-E^2)^2=0.$$

Indem ich vorzüglich diese specielle Formel als Anhaltspunct benutzt habe, bin ich zu folgender Darstellung der allgemeinen Formel in Form einer Summe positiver Quadrate gelangt:

$$1.\quad \left\{\begin{array}{l} 15[EF\alpha+D(E^2-F^2)]^2+15[FD\beta+E(F^2-D^2)]^2 \\ \qquad +15[DE\gamma+F(D^2-E^2)]^2 \\ +[2\beta\gamma D+(\gamma-\beta)EF+D(2D^2-E^2-F^2)]^2 \\ \qquad +[2\gamma\alpha E+(\alpha-\gamma)FD+E(2E^2-F^2-D^2)]^2 \\ +[2\alpha\beta F+(\beta-\alpha)DE+F(2F^2-D^2-E^2)]^2 \\ \qquad +[\alpha\beta\gamma+\alpha D^2+\beta E^2+\gamma F^2)]^2=0. \end{array}\right.$$

Da dieser Ausdruck nie negativ werden kann, so folgt zunächst, dafs die obige cubische Gleichung stets drei reale Wurzeln hat, wenn nämlich A, B, C, D, E, F reale Gröfsen sind. Damit ferner die cubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, müssen diese sieben Quadrate jedes für sich gleich Null werden, wodurch man scheinbar sieben Gleichungen erhält. Es ist aber leicht zu zeigen, dafs sie alle erfüllt werden, wenn nur die zwei ersten Statt haben, nämlich die Gleichungen

$$2.\quad EF\alpha+D(E^2-F^2)=0 \quad\text{und}\quad FD\beta+E(F^2-D^2)=0.$$

Dies sind also die beiden nothwendigen Bedingungen; welche auch hinreichend sind, wenn nicht zugleich zwei der Gröfsen D, E, F der Null gleich sind; denn in diesem Falle würde noch eine der drei Bedingungen $F^2-\alpha\beta=0$, $D^2-\beta\gamma=0$ und $E^2-\alpha\gamma=0$ hinzutreten müssen.

Anders verhält es sich aber, wenn man auch imaginäre Werthe von A, B, C, D, E, F zuläfst. Alsdann giebt die Formel (1.) nicht zwei, sondern nur eine Bedingungsgleichung dafür, dafs zwei der Gröfsen A, B', C' einander gleich werden; und wenn nur diese erfüllt ist, so kann man im Allgemeinen aus der Formel $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy$ durch die obige Substitution die Producte gar nicht hinwegschaffen; es ist dann, damit dies gelinge, noch die Erfüllung einer zweiten Bedingungsgleichung nöthig. Ich bin auf diesen merkwürdigen Umstand, über welchen die Mathematiker grofsentheils noch im Unklaren zu sein scheinen, durch *Jacobi* aufmerksam gemacht worden, als ich ihm die obige Zerfällung in Quadrate mitgetheilt hatte, und ich will den Umstand hier näher erörtern. Der Grund davon liegt in den neun Gröfsen $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, welche bekanntlich folgende Werthe haben:

$$a^2=\frac{D^2-(A'-B)(A'-C)}{(C'-A')(A'-B')},\quad a'^2=\frac{D^2-(B'-B)(B'-C)}{(C'-A')(A'-B')},\quad a''^2=\frac{D^2-(C'-B)(C'-C)}{(C'-A')(A'-B')},$$

$$b^2=\frac{E^2-(A'-A)(A'-C)}{(A'-B')(B'-C')},\quad b'^2=\frac{E^2-(B'-A)(B'-C)}{(A'-B')(B'-C')},\quad b''^2=\frac{E^2-(C'-A)(C'-C)}{(A'-B')(B'-C')},$$

$$c^2=\frac{F^2-(A'-A)(A'-B)}{(B'-C')(C'-A')},\quad c'^2=\frac{F^2-(B'-A)(B'-B)}{(B'-C')(C'-A')};\quad c''^2=\frac{F^2-(C'-A)(C'-B)}{(B'-C')(C'-A')},$$

Wenn nun die obige Bedingungsgleichung 1. erfüllt wird, so dafs zwei Wurzeln der cubischen Gleichung, für welche ich A' und B' nehme, einander gleich sind, so werden die Nenner der sechs Gröfsen a, a', a'', b, b', b'' (wegen des Factors $A'-B'=0$) der Null gleich, also diese Gröfsen selbst unendlich grofs: also ist in diesem Falle die obige Substitution unstatthaft, und die Aufgabe, die Producte hinwegzuschaffen, unlösbar. Nur dann, wenn aufserdem auch die sechs Zähler der Null gleich werden, können diese Gröfsen wieder endlich werden. Damit also in diesem Falle die Wegschaffung der Producte möglich werde, mufs diese Bedingung zugleich mit erfüllt werden. Bezeichnet nun A eine der drei Wurzeln A', B', C', so mufs zugleich $D^2-(A-B)(A-C)=0$ sein, damit für $A'=B'$ die drei Gröfsen a, a', a'' endlich seien. Diese Gleichung, verbunden mit der cubischen Gleichung für A, giebt, nach der Elimination des A:

$$EF(B-C)+D(E^2-F^2)=0.$$

Damit aufserdem die Zähler der Werthe von b, b', b'' der Null gleich werden, mufs $E^2-(A-A)(A-C)=0$ sein; welches, mit der cubischen

Gleichung für A verbunden, folgende Bedingungsgleichung giebt:

$$FD(C-A)+E(F^2-D^2) = 0.$$

Dies sind aber die oben bei 2. gefundenen Bedingungsgleichungen, mit welchen zugleich auch allemal die Bedingungsgleichung 1. erfüllt wird. Daraus folgt, dafs, wenn die Gleichung 1. für sich allein besteht, ohne die beiden Gleichungen bei 2. (welches nur für imaginäre Coëfficienten möglich ist): dafs dann die Producte aus dem Ausdrucke $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy$ sich nicht wegschaffen lassen; dafs aber, wenn die Gleichungen bei 2. erfüllt werden, (mit welchen allemal auch die Gleichung 1. erfüllt wird), die Lösung der Aufgabe wieder möglich ist; und zwar unbestimmt, so, dafs es unendlich viele Lösungen giebt.

18.

Versuch der Auflösung der Aufgabe Nr. 12. im 6ten Bande S. 214 dieses Journals: Aus den drei, die Winkel eines geradlinigen Dreiecks halbirenden Scheitellinien den Inhalt desselben zu finden.

(Von Hrn. v. *Renthe-Fink*, Königl. Preuſs. Premier-Lieutnant und Adjudanten zu Magdeburg.)

Es seien a, b, c die Seiten, α, β, γ die Winkel, h', h'', h''' die die Winkel halbirenden Scheitellinien, r der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und $\varDelta$ der Inhalt des Dreiecks abc Taf. III., so ist

$$h = r\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}\right]$$

oder

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{2r}{h'} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}, \\ \dfrac{2r}{h''} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}, \\ \dfrac{2r}{h'''} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}, \end{cases}$$

und da

$$\varDelta = \frac{r^2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{r^2 Q}{P},$$

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{2r.\varDelta}{h'} = \varDelta\sin\frac{1}{2}\alpha + r^2\cos\frac{1}{2}\alpha = a', \\ \dfrac{2r.\varDelta}{h''} = \varDelta\sin\frac{1}{2}\beta + r^2\cos\frac{1}{2}\beta = b', \\ \dfrac{2r.\varDelta}{h'''} = \varDelta\sin\frac{1}{2}\gamma + r^2\cos\frac{1}{2}\gamma = c'. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$3.\quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 2r^4 + \varDelta^2 + 2(r^4 + \varDelta^2)P = S,$$

und

$$4.\quad a'b'c' = r^4\varDelta + 2(r^4 + \varDelta^2)\varDelta P = E,$$

also

$$5.\quad S_2 - \frac{E}{\varDelta} = r^4 + \varDelta^2,$$

und wenn $\frac{1}{h'^2}+\frac{1}{h''^2}+\frac{1}{h'''^2}=\sigma_2$ und $\frac{1}{h'h''h'''}=\eta$ gesetzt wird,

$$4r^2\Delta^2.\sigma_2-8r^3\Delta^2\eta=r^4+\Delta^2,$$

daher

$$6.\quad \Delta^2=\frac{r^4}{4r^2\sigma_2-1-8r^3\eta}\quad \text{und}\quad \Delta=\frac{r^2}{\sqrt{(4r^2\sigma_2-1-8r^3\eta)}}.$$

Aus (2.), wenn $\frac{1}{h'}=\lambda$, $\frac{1}{h''}=\lambda''$ und $\frac{1}{h'''}=\lambda'''$ gesetzt wird, folgt

$$7.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}\alpha=\frac{a'\Delta\pm r^2\sqrt{(r^4+\Delta^2-a'^2)}}{r^4+\Delta^2}=\frac{\lambda'\Delta\pm r^2\sqrt{(\lambda''^2+\lambda'''^2-2r\eta)}}{2r\Delta(\sigma_2-2r\eta)}=\frac{\lambda'\Delta\pm r^2\sqrt{A'}}{2r\Delta(\sigma_2-2r\eta)},\\ \sin\frac{1}{2}\beta=\frac{b'\Delta\pm r^2\sqrt{(r^4+\Delta^2-b'^2)}}{r^4+\Delta^2}=\frac{\lambda''\Delta\pm r^2\sqrt{(\lambda'^2+\lambda'''^2-2r\eta)}}{2r\Delta(\sigma_2-2r\eta)}=\frac{\lambda''\Delta\pm r^2\sqrt{B'}}{2r\Delta(\sigma_2-2r\eta)},\\ \sin\frac{1}{2}\gamma=\frac{c'\Delta\pm r^2\sqrt{(r^4+\Delta^2-c'^2)}}{r^4+\Delta^2}=\frac{\lambda'''\Delta\pm r^2\sqrt{(\lambda'^2+\lambda''^2-2r\eta)}}{2r\Delta(\sigma_2-2r\eta)}=\frac{\lambda'''\Delta\pm r^2\sqrt{C'}}{2r\Delta(\sigma_2-2r\eta)}. \end{cases}$$

Ferner folgt aus (2.):

$$8.\quad a'\sin.\tfrac{1}{2}\alpha+b'\sin\tfrac{1}{2}\beta+c'\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\Delta.$$

Hieraus und aus (7.) folgt

$$9.\quad \begin{cases} \Delta=\frac{1}{2}r\left[\frac{\sqrt{(\lambda''^2+\lambda'''^2-2r\eta)}}{\lambda''\lambda'''}+\frac{\sqrt{(\lambda'^2+\lambda'''^2-2r\eta)}}{\lambda'\lambda'''}+\frac{\sqrt{(\lambda'^2+\lambda''^2-2r\eta)}}{\lambda'\lambda''}\right]\\ \quad=\frac{1}{2}r\left[\sqrt{\left(h''^2+h'''^2-\frac{2rh''h'''}{h'}\right)}+\sqrt{\left(h'^2+h'''^2-\frac{2rh'h'''}{h''}\right)}\right.\\ \qquad\left.+\sqrt{\left(h'^2+h''^2-\frac{2rh'h''}{h'''}\right)}\right]. \end{cases}$$

Die Entwicklung von r aus (6.) und (9.) würde zu einer Gleichung vom 16ten Grade führen.

Ergebnisse, welche sich bei dem Versuch der Lösung obiger Aufgabe herausgestellt haben, sind folgende.

1. Werden die Fufspuncte der oben gedachten Scheitellinien durch gerade Linien mit einander verbunden, so ist der Inhalt des dadurch gebildeten Dreiecks:

$$10.\quad \Delta'=\frac{rh'h''h'''}{4\Delta}.$$

Beweis:

$$11.\quad \begin{cases} a,0=\frac{r}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)},\\ b,0=\frac{r}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)},\\ c,0=\frac{r}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}; \end{cases}$$

daher

$$\Delta' = \tfrac{1}{2}r^2\left[\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}+\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}+\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2\left[\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)+\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}\right]$$

$$= \frac{2r^2 Q}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)},$$

und aus (1.):

$$\frac{8r^3}{h'h''h'''} = \frac{P\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{Q^2};$$

daher

$$\frac{4\Delta' r}{h'h''h'''} = \frac{P}{Q} = \frac{r^2}{\Delta}$$

und

$$12. \quad \Delta' = \frac{r^3 h'h''h'''}{4\Delta};$$

was zu beweisen war.

8. Werden von den Fufspuncten der mehrgedachten Scheitellinien Perpendikel auf die Seiten gefällt, und solche mit p', p'', p''' bezeichnet, so ist der Inhalt des Dreiecks:

$$13. \quad \Delta = \frac{4}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}+\frac{1}{p'''}\right)\left(\frac{3}{p'''}-\frac{1}{p'}-\frac{1}{p''}\right)\left(\frac{3}{p''}-\frac{1}{p'}-\frac{1}{p'''}\right)\left(\frac{3}{p'}-\frac{1}{p''}-\frac{1}{p'''}\right)\right]}};$$

denn

$$\Delta = (a+b)p''' \quad \text{oder} \quad a+b = \frac{\Delta}{p'''},$$

$$\Delta = (a+c)p'' \quad - \quad a+c = \frac{\Delta}{p''},$$

$$\Delta = (b+c)p' \quad - \quad b+c = \frac{\Delta}{p'}.$$

Hieraus folgt

$$a = \Delta\left(\frac{1}{p'''}+\frac{1}{p''}+\frac{1}{p'}\right),$$

$$b = \Delta\left(\frac{1}{p''}+\frac{1}{p'''}+\frac{1}{p''}\right),$$

$$c = \Delta\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}+\frac{1}{p'''}\right).$$

Diese Werthe von a, b, c in der Formel des Inhaltes des Dreiecks aus den 3 Seiten substituirt, giebt obigen Werth für Δ.

Ferner folgt aus (7.)

$$14. \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{b'\sqrt{A'}-a'\sqrt{B'}}{r^4+\Delta^2}, \\ \sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) = \frac{a'\sqrt{C'}-c'\sqrt{A'}}{r^4+\Delta^2}, \\ \sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{c'\sqrt{B'}-b'\sqrt{C'}}{r^4+\Delta^2}, \end{cases}$$

und hieraus

$$a'\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+b'\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)+c'\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 0$$

und

$$15. \quad \sqrt{(A')}\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\sqrt{(B')}\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)+\sqrt{(C')}\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 0.$$

Aus (9.) folgt

$$16. \quad \begin{cases} bc_{,}+b_{,}c = \sqrt{\left(h'^2+h'''^2-\frac{2rh'}{h''h'''}\right)}, \\ ac_{,}+a_{,}c = \sqrt{\left((h'^2+h''^2)-\frac{2rh''}{h'h'''}\right)}, \\ ab_{,}+a_{,}b = \sqrt{\left((h'^2+h''^2)-\frac{2rh'''}{h'h''}\right)}. \end{cases}$$

Magdeburg, den 21. August 1843.

[illegible]
si vou[illegible]
[illegible]
Co[illegible] ainsi
vos autres b[illegible]
res tous les
dé[illegible] si
pir[illegible]
mi[illegible] en
imp mais
jeu aux d[illegible]
[illegible]
pou.. ou
on [illegible]
vos [illegible]
les b[illegible] mé
[illegible]

19.

Sur les transformations et les valeurs de plusieurs intégrales définies qui se rapportent aux surfaces et aux solidités des volumes.

Premier Mémoire.

Par Mr. l'Abbé *Barnabé Tortolini*, Professeur de Mathématiques transcendantes à l'Université de Rome.

(Le mémoire qu'on va lire a été traduit de l'italien et extrait du volume 238. du *Giornale Arcadico di Scienze e Lettere.*)

1°. **On** détermine la position d'un point dans l'espace au moyen de trois coordonnées rectilignes x, y, z, paralléles à trois axes. On connait depuis longtemps les transformations nécessaires pour passer d'un système de coordonnées x, y, z à un autre de la même espèce ou d'une espèce différente, et la substitution de trois coordonnées polaires r, p, q à faire aux coordonnées rectangulaires x, y, z. Mr. *Lamé* dans plusieurs mémoires importants sur la théorie de la chaleur publiés dans le journal de Mr. *Liouville* fait usage d'un nouveau genre de coordonnées qu'il appelle *elliptiques*, et qui se présentent dans la résolution de plusieurs problèmes de physique mathématique; voilà en quoi elles consistent. La position variable d'un point dans l'espace est fixée par trois coordonnées rectangulaires x, y, z; elle peut encore s'obtenir lorsqu'on imagine ce point dans l'intersection commune de trois surfaces à paramètres toujours variables. Pour cette objet nous choisirons trois surfaces de second ordre qui ont de centre, c'est à dire l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une seule nappe, et l'hyperboloïde à deux nappes. Pour connaître dans ce cas la loi de variation des paramètres ou axes principales, il suffira de concevoir trois quantités, ou éléments variables λ, μ, ν, et deux constantes b, c, et pour fixer les idées soit $b < c$. De cette manière, en formant les trois équations

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda^2}+\dfrac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1, \quad \dfrac{x^2}{\mu^2}+\dfrac{y^2}{\mu^2-b^2}-\dfrac{z^2}{\mu^2-c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2}-\dfrac{y^2}{b^2-\nu^2}-\dfrac{z^2}{c^2-\nu^2}=1, \end{cases}$$

et en supposant λ plus grand que b et c, le paramètre μ compris entre b et c, et le paramètre ν plus petit que b, la première de ces équations représente une ellipsoïde, la seconde une hyperboloïde à une seule nappe, et la troisième une hyperboloïde à deux nappes. Le but, que je me propose dans ce mémoire est de faire connaître plusieurs résultats, que l'on obtient en transformant quelques integrales définies par l'introduction des valeurs des coordonnées *elliptiques* λ, μ, ν, ou d'autres du même genre; mais il est nécessaire de faire précéder ce qui suit par les considérations suivantes.

2°. On voit par la forme des équations (1.) comment, étant donnée un point, on pourra déterminer toujours sa position au moyen des coordonnées nouvelles λ, μ, ν; mais on ne pourra pas établir que les trois surfaces de second ordre étant données elles déterminent la position du point, car il y a huit points d'intersection; et une intégrale relative à une extension symétrique autour de l'origine des coordonnées, circonscrite par une surface courbe et coupée par des plans coordonnées représentera seulement la huitième partie de cette extension, si l'on prend pour limites de l'intégration les limites des coordonnées positives. Ajoutons qu'il ne sera pas difficile de démontrer par les équations des plans taugents que les trois surfaces (1.) se coupent en angles droits, et dans leurs lignes de courbure, de manière qu'on pourra les appeler *surfaces orthogonales*. Les sections principales ont les mêmes foyer, et Mr. *Lamé* les a appelé *surfaces omofocales*. Nous ne laisserons pas d'observer que les mêmes propositions ont été données en 1811 par Mr. *Binet* dans un mémoire sur les moments d'inertie, publié dans le XVI. cahier du journal de l'école polytechnique. C'est ce que Mr. *Binet* même fait remarquer dans un article qui se trouve inséré dans le tome 2. du journal de Mr. *Liouville*.

Les variables x, y, z étant déterminées par trois équations, on pourra selon les règles ordinaires de l'élimination déduire la valeur de chaque coordonnée en fonction des nouvelles coordonnées λ, μ, ν, et nous aurons

$$bcx = \lambda\mu\nu, \qquad b\sqrt{(c^2-b^2)}.y = \sqrt{(\lambda^2-b^2)}.\sqrt{(\mu^2-b^2)}.\sqrt{(b^2-\nu^2)},$$
$$c\sqrt{(c^2-b^2)}.z = \sqrt{(\lambda^2-c^2)}.\sqrt{(c^2-\mu^2)}.\sqrt{(c^2-\nu^2)}.$$

Les valeurs que nous avons trouvé peuvent encore se déduire d'une équation de sixième degré par rapport à une des variables λ, μ, ν. En effet si l'on reprend l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2} = 1,$$

ordonnée par rapport aux puissances de λ, elle donnera

$$\lambda^6 - A\lambda^4 + B\lambda^2 - C = 0,$$

où

$$A = x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - c^2,$$
$$B = x^2(b^2 + c^2) + y^2 c^2 + z^2 b^2 + b^2 c^2, \qquad C = b^2 c^2 x^2.$$

En considérant cette équation de sixième dégré, l'on voit que les μ, et ν des deux hyperboloïdes seront aussi des racines qui la vérifient, et que par conséquent

$$A = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \qquad B = \lambda^2\mu^2 + \lambda^2\nu^2 + \mu^2\nu^2, \qquad C = \lambda^2\mu^2\nu^2,$$

et par élimination on retrouvera les valeurs de x, y, z que nous avons données.

3°. Dans plusieurs applications il est plus commode d'employer au lieu des trois surfaces de second ordre trois variétés des ces surfaces, et nous pourrons choisir la sphère au lieu de l'ellipsoïde, et deux cônes obliques ou à base elliptique au lieu des deux hyperboloïdes. Alors, si l'on appelle r le paramètre de la sphère ou son rayon, et qu'on désigne par $b < c$ une constante, par μ un paramètre variable compris entre b et c, et par ν un autre paramètre plus petit que b, nous aurons ces trois équations:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0.$$

La seconde de ces équations représente un cône oblique ou à base elliptique, et asymptotique à l'hyperboloïde à une seule nappe; la troisième représente un cône de la même espèce asymptotique à l'hyperboloïde à deux nappes. Les deux hyperboloïdes sont celles des équations (1.). Les coordonnées x, y, z s'expriment maintenant en fonction des coordonnées r, μ, ν au moyen des formules

$$bcx = r\mu\nu, \qquad b\sqrt{(c^2 - b^2)}.y = r\sqrt{(\mu^2 - b^2)}.\sqrt{(b^2 - \nu^2)},$$
$$c\sqrt{(c^2 - b^2)}.z = r\sqrt{(c^2 - \mu^2)}.\sqrt{(c^2 - \nu^2)}.$$

La sphère, et les deux cônes des équations trouvées seront trois surfaces orthogonales. A présent nous passerons à des applications particulières.

4°. L'intégrale double de la quadrature des surfaces courbes est

$$S = \iint dx\, dy \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)},$$

où $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ sont les dérivées partielles de z tirées de l'équation de la surface

$$z = f(x, y).$$

On connait depuis longtems les méthodes pour la transformation des intégrales doubles, triples, etc. Dans notre cas on excute la transformation

lorsque, r, μ, ν étant trois nouvelles variables, on a pour équation de la surface

$$r = \varphi(\mu, \nu).$$

Si r', r_1 sont les dérivées partielles de r par rapport à μ, et ν, et x', y', z', x_1, y_1, z_1 les dérivées partielles de x, y, z par rapport aux variables μ, et ν, l'intégrale transformée sera

$$S = \iint dx\, dy \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)},$$

en faisant pour abréger

$$X = y_1 z' - z_1 y', \qquad Y = x_1 z' - x' z_1, \qquad Z = x_1 y' - x' y_1.$$

Si l'on reprend les valeurs de x, y, z déduites des équations données dans le paragraphe précédent, on aura

$$x = \frac{r\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{r\sqrt{(\mu^2 - b^2)}.\sqrt{(b^2 - \nu^2)}}{b\sqrt{(c^2 - b^2)}}, \quad z = \frac{r\sqrt{(c^2 - \mu^2)}.\sqrt{(c^2 - \nu^2)}}{c\sqrt{(c^2 - b^2)}}.$$

En différentiant x, y, z par rapport aux variables μ, ν et en faisant pour abréger

$$M = \sqrt{(\mu^2 - b^2)}, \quad N = \sqrt{(b^2 - \nu^2)}, \quad P = \sqrt{(c^2 - \mu^2)}, \quad Q = \sqrt{(c^2 - \nu^2)},$$

on aura

$$x' = \frac{r\nu + \mu\nu r'}{bc}, \qquad x_1 = \frac{r\mu + \mu\nu r}{bc},$$

$$y' = \frac{1}{b\sqrt{(c^2 - b^2)}}\left(\frac{N}{M} r\mu + MNr'\right), \qquad y_1 = \frac{1}{b\sqrt{(c^2 - b^2)}}\left(MNr_1 - \frac{M}{N} r\nu\right),$$

$$z' = \frac{1}{c\sqrt{(c^2 - b^2)}}\left(PQr' - \frac{Q}{P} r\mu\right), \qquad z_1 = \frac{1}{c\sqrt{(c^2 - b^2)}}\left(PQr_1 - \frac{P}{Q} r\nu\right).$$

En formant les produits deux à deux pour obtenir les valeurs de X, Y, Z, on aura après les reductions

$$\begin{cases} Z = \dfrac{r}{c\sqrt{(c^2 - b^2)}.MN}\left(\mu r' M^2 + \nu r_1 N^2 + r(\mu^2 - \nu^2)\right), \\ Y = \dfrac{r}{c\sqrt{(c^2 - b^2)}.PQ}\left(\mu r' P^2 - \nu r_1 Q^2 - r(\mu^2 - \nu^2)\right), \\ Z = \dfrac{r}{bcMNPQ}\left(r\mu\nu(\mu^2 - \nu^2) - \mu r_1 N^2 Q^2 - \nu r' M^2 P^2\right). \end{cases}$$

Avant d'élever au carré ces trois expressions, et de les ajouter, il faut les réduire au même dénominateur, et si l'on fait pour abréger

$$K = \frac{r}{bc\sqrt{(c^2 - b^2)}.MNPQ},$$

on aura

$$\begin{cases} X = K[r\mu(\mu^2-\nu^2) - \nu r' M^2 P^2 - \mu r_1 N\ Q^2]\sqrt{(c^2-b^2)}, \\ Y = K[\mu r' P^2 - \nu r_1 Q^2 - r(\mu^2-\nu^2)]\, c\, MN, \\ Z = K[\mu r' M^2 - \nu r_1 N^2 + r(\mu^2-\nu^2)]\, b\, PQ. \end{cases}$$

En élévant au carré et prenant les sommes, il est facile de voir que les sommes des doubles produits se détruisent. En réunissant les coëfficients de r'^2, r_1^2, r^2, on trouvera le facteur commun $b^2c^2(c^2-b^2)$, et toute réduction faite on obtiendra

$$R = r\,\frac{\sqrt{(\mu^2-\nu^2)(M^2P^2r'^2+N^2Q^2r_1^2+(\mu^2-\nu^2)r^2)}}{MNPQ},$$

où l'on a fait pour abréger

$$R = \sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}.$$

Cela posé, la formule pour la quadrature des surfaces courbes se transforme en

$$S = \iint r\,d\mu\,d\nu\,\frac{\sqrt{[(\mu^2-\nu^2)(M^2P^2r'^2+N^2Q^2r_1^2+(\mu^2-\nu^2)r^2)]}}{MNPQ},$$

et comme μ est compris entre b et c, et $\nu < b$, on pourra définir l'intégrale comme portion donnée de la surface, de la manière suivante:

$$S = \int_0^b\int_b^c r\,d\mu\,d\nu\,\frac{\sqrt{[(\mu^2-\nu^2)(M^2P^2r^2+N^2Q^2r_1^2+(\mu^2-\nu^2)r^2)]}}{MNPQ}.$$

Un des cas les plus simples est celui d'une sphère dont le rayon est r. Alors les dérivées r', r_1 deviennent nulles, et pour avoir la surface totale, il faut multiplier le second membre par 8; la surface sphérique sera donc exprimée par l'intégrale définie

$$S = 8r^2\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\nu^2)}\sqrt{(c^2-\mu^2)}\sqrt{(^2-\nu^2)}}.$$

Mais d'un autre còté la surface sphérique est $4\pi r^2$, si l'on exprime par π une demi-circonférence de cercle: nous aurons donc l'intégrale

$$\int_0^b\int_c^b \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\nu^2)}\sqrt{(c^2-\mu^2)}\sqrt{(c^2-\nu^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Telle est la valeur trouvée par Mr. *Lamé* dans les volumes 2. et 3. du journal de mathématiques de Mr. *Liouville* *) vérifiée ensuite au moyen des fonctions elliptiques par Mr. *Poisson* **), demontrée géométriquement par Mr. *Chasles* et plus simplement par Mr. *Terquem* ***). L'intégrale trouvée,

---

*) *Liouville* journal vol. 2. pag. 167, vol. 3. pag. 555.
**) *Liouville* journal vol. 2. pag. 185.
***) *Liouville* journal vol. 3. pag. 13 et 99.

rapportée à des considérations géométriques, représentera la huitième partie d'une surface sphérique qui a pour rayon 1. Je ne m'occuperai pas actuellement des autres applications qu'on pourrait faire dans l'hypothèse de r variable: car les résultats qu'on obtient, surtout pour l'ellipsoïde, sont très compliqués; je donnerai plutôt une autre démonstration de l'intégrale définie que nous avons trouvée.

5°. Cette autre démonstration consiste dans une transformation de la formule générale pour la cubature des solides. En appelant toujours x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface courbe, on a pour un volume indéfini:

$$V=\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz.$$

On sait que si r, μ, ν sont trois autres coordonnées du même point, qui avec les premières coordonnées ont une relation donnée par les formules

$$dx=\alpha dr+\beta d\mu+\gamma d\nu,\qquad dy=\alpha' dr+\beta' d\mu+\gamma' d\nu,$$
$$dz=\alpha'' dr+\beta'' d\mu+\gamma'' d\nu,$$

l'intégrale triple devient

$$V=\int\!\!\int\!\!\int(\alpha''(\gamma\beta'-\beta\gamma')+\beta''(\gamma'\alpha-\gamma\alpha')+\gamma''(\alpha'\beta-\alpha\beta'))\,dr\,d\mu\,d\nu.$$

En reprenant les valeurs de x, y, z No. 4. et en les différenciant complètement par rapport aux variables r, μ, ν, on a

$$dx=\frac{\mu\nu dr+r\nu d\mu+r\mu d\nu}{bc},$$
$$dy=\left(MNdr+\frac{N}{M}r\mu d\mu-\frac{M}{N}r\nu d\nu\right)\frac{1}{b\surd(c^2-b^2)},$$
$$dz=\left(PQdr-\frac{Q}{P}r\mu d\mu-\frac{P}{Q}r\nu d\nu\right)\frac{1}{c\surd(c^2-b^2)},$$

et pour les valeurs de α, β, γ, ... on obtient

$$\alpha=\frac{\mu\nu}{bc},\qquad \beta=\frac{r\nu}{bc},\qquad \gamma=\frac{r\mu}{bc},$$
$$\alpha'=\frac{MN}{b\surd(c^2-b^2)},\qquad \beta'=\frac{N}{M}\cdot\frac{r\mu}{b\surd(c^2-b^2)},\qquad \gamma'=-\frac{M}{N}\cdot\frac{r\nu}{b\surd(c^2-b^2)},$$
$$\alpha''=\frac{PQ}{c\surd(c^2-b^2)},\qquad \beta''=-\frac{Q}{P}\cdot\frac{r\mu}{c\surd(c^2-b_2)},\qquad \gamma''=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{r\nu}{c\surd(c^2-b^2)}.$$

En formant les produits demandés, en les soustrayant, et réduisant au même dénominateur, on aura

$$\begin{cases} \alpha''(\gamma\beta'-\beta\gamma') = \dfrac{PQ}{MN}\cdot\dfrac{r^2(\mu^2-\nu^2)}{c^2(c^2-b^2)}, \\ \beta''(\gamma'\alpha-\alpha'\gamma) = \dfrac{MQ}{NP}\cdot\dfrac{r^2\mu^2}{c^2(c^2-b^2)}, \\ \gamma''(\alpha'\beta-\alpha\beta') = \dfrac{NP}{MQ}\cdot\dfrac{r^2\nu^2}{c^2(c^2-b^2)}. \end{cases}$$

Soit V' la somme de ces expressions après la réduction au même dénominateur, il viendra

$$V' = \frac{r^2}{c^2(c^2-b^2)}\left(\frac{(\mu^2-\nu^2)P^2Q^2+M^2Q^2\mu^2+N^2P^2\nu^2}{MNPQ}\right).$$

Enfin si l'on exécute les multiplications indiquées dans le numérateur, on trouve le facteur commun $c^2(c^2-b^2)$; donc plus simplement

$$V' = \frac{r^2(\mu^2-\nu^2)}{MNPQ},$$

et le volume V sera exprimé par l'intégrale triple

$$V = \iiint\frac{(\mu^2-\nu^2)r^2\,dr\,d\mu\,d\nu}{MNPQ}.$$

Une première intégration exécutée entre les limites 0 et r donne

$$V = \tfrac{1}{3}\iint\frac{(\mu^2-\nu^2)r^3\,d\mu\,d\nu}{MNPQ}.$$

Dans le cas d'une sphère le rayon r est constant. En prenant l'intégrale entre les limites b et c pour μ, 0 et b pour ν, et en multipliant par 8, on aura

$$V = \tfrac{8}{3}r^3\int_0^b\int_b^c\frac{(\mu^2-\nu^2)r^2\,d\mu\,d\nu}{MNPQ}.$$

Mais le volume de la sphère s'exprime par $\frac{4}{3}\pi r^3$, donc l'égalité des deux valeurs donnera évidemment la dernière formule du No. 4., et l'intégrale définie demandée représentera aussi $\frac{3}{8}$ du volume d'une sphère à rayon 1.

6. Les recherches précédentes peuvent encore s'étendre à quelque triple transcendante des fonctions elliptiques. En effet, si l'on reprend les valeurs de x, y, z déterminées par les formules du No. 2. nous avons

$$x = \frac{\lambda\mu\nu}{bc},\quad y = \frac{\sqrt{(\lambda^2-b^2)}\sqrt{(\mu^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\nu^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}},\quad z = \frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)}\sqrt{(c^2-\mu^2)}\sqrt{(c^2-\nu^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}.$$

En les différentiant complètement, et faisant pour abréger

$$\sqrt{(\lambda^2-b^2)} = G,\quad \sqrt{(\lambda^2-c^2)} = H,\quad \sqrt{(\mu^2-b^2)} = I,$$
$$\sqrt{(c^2-\mu^2)} = K,\quad \sqrt{(b^2-\nu^2)} = L,\quad \sqrt{(c^2-\nu^2)} = M,$$

on aura

$$dx = \frac{\mu\nu d\lambda + \lambda\nu d\mu + \lambda\mu d\nu}{bc}$$

$$dy = \left(\frac{IL\lambda d\lambda}{G} + \frac{GL\mu d\mu}{I} - \frac{GI\nu d\nu}{L}\right)\frac{1}{b\sqrt{(c^2-b^2)}},$$

$$dz = \left(\frac{KM\lambda d\lambda}{H} - \frac{HM\mu d\mu}{K} - \frac{HK\nu d\nu}{M}\right)\frac{1}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}.$$

Ces formules, comparées avec les formules générales

$$dx = \alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu, \quad dy = \alpha' d\lambda + \beta' d\mu + \gamma' d\nu,$$
$$dz = \alpha'' d\lambda + \beta'' d\mu + \gamma'' d\nu,$$

donneront

$$\alpha = \frac{\mu\nu}{bc}, \qquad \beta = \frac{\lambda\nu}{bc}, \qquad \gamma = \frac{\lambda\mu}{bc},$$

$$\alpha' = \frac{IL\lambda}{Gb\sqrt{(c^2-b^2)}}, \quad \beta' = \frac{GL\mu}{Ib\sqrt{(c^2-b^2)}}, \quad \gamma' = -\frac{GI\nu}{Lb\sqrt{(c^2-b^2)}},$$

$$\alpha'' = \frac{KM\lambda}{Hc\sqrt{(c^2-b^2)}}, \quad \beta'' = -\frac{HM\mu}{Kc\sqrt{(c^2-b^2)}}, \quad \gamma'' = -\frac{HK\nu}{Mc\sqrt{(c^2-b^2)}}.$$

En formant les produits indiqués, et en soustrayant, on aura

$$\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') = \frac{\lambda^2(\mu^2-\nu^2)KMG}{c^2(c^2-b^2)HIL},$$

$$\beta''(\gamma'\alpha - \alpha'\gamma) = \frac{\mu^2(\lambda^2-\nu^2)KMI}{c^2(c^2-b^2)GKL},$$

$$\gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta') = \frac{\nu^2(\lambda^2-\mu^2)HKL}{c^2(c^2-b^2)GIM}.$$

Selon les dénominations établies ci-dessus, V' sera la somme de ces trois expressions. En réduisant au même dénominateur et exécutant toutes les multiplications indiquées, on aura, après avoir réuni tous les facteurs de λ^4, μ^4, ν^4:

$$V' = \frac{\lambda^4(\mu^2-\nu^2) + \mu^4(\nu^2-\lambda^2) + \nu^4(\lambda^2-\mu^2)}{GHIKLM},$$

et puisque

$$\lambda^4(\mu^2-\nu^2) + \mu^4(\nu^2-\lambda^2) + \nu^4(\lambda^2-\mu^2) = (\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2),$$

l'intégrale triple du No. 3. se transforme en

$$V = \iiint \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{GHIKLM} d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Si l'on intègre par rapport à ν entre les limites 0 et b, par rapport à μ entre les limites b et c, et par rapport à λ entre les limites λ et c, on

aura la huitième partie du volume d'une ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1.$$

Mais le volume de l'ellipsoïde s'exprime par

$$\tfrac{4}{3}\pi\lambda\sqrt{(\lambda^2-b^2)}.\sqrt{(\lambda^2-c^2)}:$$

on a donc

$$\int_0^b\int_c^b\int_c^\lambda \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{HGIKLM}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu = \tfrac{1}{6}\pi\lambda\sqrt{(\lambda^2-b^2)}.\sqrt{(\lambda^2-c^2)}.$$

Cette expression a été trouvée aussi par Mr. *Lamé* *), et Mr. *Poisson* l'a vérifiée ensuite au moyen de la différentiation **).

7°. Cherchons enfin la valeur d'une autre intégrale définie double qui se rapporte à la quadrature de l'ellipsoïde aux trois axes inégales

$$2\lambda,\quad 2\sqrt{(\lambda^2-b^2)},\quad 2\sqrt{(\lambda^2-c^2)}.$$

En conservant toutes les dénominations établies dans le numéro précédent, on déterminera les dérivées partielles de x, y, z par rapport à μ et ν, λ étant consideré comme constant. On aura

$$x'=\frac{\lambda\nu}{bc},\qquad x_1=-\frac{\lambda\mu}{bc},$$

$$y'=\frac{\sqrt{(\lambda^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}\cdot\frac{L}{I}\mu,\qquad y_1=-\frac{\sqrt{(\lambda^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}\cdot\frac{I}{L}\nu,$$

$$z'=-\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\cdot\frac{M}{N}\mu,\qquad z_1=-\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\cdot\frac{N}{M}\nu.$$

En formant les produits $x'y_1$, x_1y', ... etc. pour obtenir les valeurs de X, Y, Z, et en faisant pour abréger

$$K_1=\frac{\lambda\sqrt{(\lambda^2-b^2)}.\sqrt{(\lambda^2-c^2)}}{b^2c^2(c^2-b^2)},$$

après avoir réduit les fractions au même dénominateur $IKLM$, on a

$$Z=\frac{b^2c\sqrt{(c^2-b^2)}}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)}}\cdot\frac{KMK_1(\mu^2-\nu^2)}{IKLM},$$

$$Y=\frac{c^2b\sqrt{(c^2-b^2)}}{\sqrt{(\lambda^2-b^2)}}\cdot\frac{ILK_1(\mu^2-\nu^2)}{IKLM},$$

$$X=\frac{bc(c^2-b^2)}{\lambda}\cdot\frac{\mu^2\nu^2K_1(\mu^2-\nu^2)}{IKLM}.$$

En élévant au carré, faisant l'addition, et extrayant la racine, après avoir supposé

$$R=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)},$$

*) *Liouville* journal vol. 2. pag. 167.

**) *Liouville* journal vol. 2. pag. 185.

et après avoir fait entrer le dénominateur de K^1, sous le signe radical, on a

$$R = \frac{(\mu^2-\nu^2)\lambda\sqrt{(\lambda^2-b^2)}.\sqrt{(\lambda^2-c^2)}}{IKLM}\sqrt{\left(\frac{x^2}{\lambda^4}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)^2}\right)},$$

en observant que

$$\frac{\mu^2\nu^2}{b^2c^2}=\frac{x^2}{\lambda^2},\qquad \frac{I^2L^2}{b^2(c^2-b^2)}=\frac{y^2}{\lambda^2-b^2},\qquad \frac{K^2M^2}{c^2(c^2-b^2)}=\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}.$$

Mais les valeurs de x, y, z du numéro précédent donnent

$$\frac{x^2}{\lambda^4}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)^2}=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)},$$

et la valeur de R se réduit simplement à

$$R=\frac{\mu^2-\nu^2}{IKLM}\sqrt{((\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2))},$$

d'où l'on conclura que la surface de l'ellipsoïde à trois axes inégales dépend de l'intégrale

$$S=\iint\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}}{IKLM}\,d\mu\,d\nu,$$

et la surface totale sera

$$S=8\int_0^b\int_b^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}}{IKLM}\,d\mu\,d\nu.$$

Mais on sait d'ailleurs que la surface d'une ellipsoïde à trois axes inégales $2h$, $2h'$, $2h''$, dont $2h$ est le plus petit, est exprimée par la somme

$$S=2\pi h^2+2\pi h'h''\int_0^1\frac{du}{T}-2\pi h'h''\varepsilon^2\varepsilon_1^2\int_0^1\frac{u^2du}{T},$$

où

$$\varepsilon^2=\frac{h'^2-h^2}{h'^2},\qquad \varepsilon_1^2=\frac{h''^2-h^2}{h''^2},$$

$$T=\sqrt{(1-(\varepsilon^2+\varepsilon_1^2)u^2+\varepsilon^2\varepsilon_1^2u^4)}.$$

Dans notre cas on a pour les valeurs de $c>b$:

$$h=\sqrt{(\lambda^2-c^2)},\quad h'=\sqrt{(\lambda^2-b^2)},\quad h''=\lambda,$$

par conséquent

$$\varepsilon^2+\varepsilon_1^2=\frac{2\lambda^2c^2-b^2\lambda^2}{\lambda^2(\lambda^2-b^2)},\qquad \varepsilon^2\varepsilon_1^2=\frac{c^2(c^2-b^2)}{\lambda^4(\lambda^2-b^2)}.$$

On trouvera donc l'intégrale définie

$$\int_0^b\int_b^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{((\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}}{IKLM}\,d\mu\,d\nu$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi\left(\lambda^2-c^2+\lambda\sqrt{(\lambda^2-b^2)}\int_0^1\frac{du}{T}-\frac{c^2(c^2-b^2)}{\lambda\sqrt{(\lambda^2-b^2)}}\int_0^1\frac{u^2du}{T}\right).$$

Il est clair que l'intégrale définie du premier membre dépend de la transformation des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce.

Avant de terminer ce mémoire nous fairons quelques observations sur les formules trouvées.

Soit P la normale abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent à la surface dans le point (x, y, z), on aura

$$P = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{\lambda^4} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)^2}\right)}},$$

ou plus simplement, par la substitution des valeurs de x, y, z, comme on l'a déjà remarqué:

$$P = \frac{\lambda\sqrt{(\lambda^2 - b^2)}.\sqrt{(\lambda^2 - c^2)}}{\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)}.\sqrt{(\lambda^2 - \nu^2)}}$$

On conclura de cette expression, et des proprietés connues de l'ellipsoïde que $\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)}.\sqrt{(\lambda^2 - \nu^2)}$ est le produit des demi-axes principales d'une section diamétrale parallèle au plan tangent. Cela posé, si l'on différentie deux fois la valeur de S qui représente l'intégrale indéfinie double, on aura

$$\frac{d^2 S}{\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)}.\sqrt{(\lambda^2 - \nu^2)}} = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu\,d\nu}{IKLM}.$$

Pour étendre ce dernier rapport à la surface totale, il faut multiplier par 8 les deux membres, intégrer entre les limites établies, et ensuite diviser par π (π étant le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre). On aura donc

$$8\int_0^b\int_b^c \frac{d^2 S}{\pi\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)}.\sqrt{(\lambda^2 - \nu^2)}} = \tfrac{1}{8}\pi\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu\,d\nu}{IKLM}.$$

Par conséquent le premier membre représente la somme des éléments de la surface de l'ellipsoïde, divisée par les aires des sections diamètrales parallèles au plans tangents de ces éléments. Mr. *Chasles* *) dit avoir prouvé dans un ouvrage qu'il a récemment publié **), que cette somme est 4.

On aura donc toujours le résultat connu

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu\,d\nu}{IKLM} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Mr. *Chasles*, en faisant usage du théorème mentionné, parvient à démontrer géométriquement l'intégrale définie.

---

*) *Liouville* journal, vol. 3. pag. 113.

**) *Chasles* Aperçu historique sur l'origine et les développements des méthodes en géométrie pag. 819.

20.

Mémoire sur quelques applications de la méthode inverse des tangentes.

(Par Mr. *Barnabé Tortolini*, Professeur de Mathématiques transcendantes à l'Université de Rome.)

(Extrait du tome 79. du journal arcadique de Rome.)

1°. Étant donné l'équation d'une courbe entre les coordonnées rectangulaires x, y, on pourra toujours trouver, ou exactement, ou par approximation, la longueur d'un arc correspondant aux mêmes coordonnées x, y. Dans le premier cas on dit que la courbe est rectifiable; dans le second cas la rectification ne pourra s'exécuter que par le moyen d'une serie, comme il arrive pour l'ellipse, et pour l'hyperbole, dont la rectification a donné sujet aux géomètres à plusieurs recherches importantes. On pourrait proposer les problème réciproque, c'est à dire: supposant que l'arc d'une courbe plane soit une fonction determinée de l'abscisse: trouver l'équation de la courbe entre les coordonnées rectangulaires x et y. Avant de repondre à cette question, nous répéterons la remarque déjà faite, que l'arc s pourra être donné en fonction de l'abscisse, ou en termes finies, ou par approximation, et que dans la première hypothèse seulement il y aura lieu d'un genre de courbes rectifiables. Dans ce mémoire on trouvera la solution de cette double question, avec des applications choisies; on y trouvera en outre la recherche de l'équation des courbes qui sont les développées des précédentes, pourvu qu'elles soient rectifiables. Les exemples qu'on a choisis, se rapportent particulièrement aux cas dans lesquels l'arc s et l'abscisse x expriment une parabole d'un ordre donné $m+n$; c'est pourquoi je donne les formules qu'on trouve dans le *Bulletin des sciences de Ferussac* pour l'année 1825, où est dit qu'on les a extrait d'un ouvrage de M. *Q. F. Werneburg* de Jena qui a pour titre *Curvarum aliquot nuper repertarum synopsis*. Comme je n'ai aucune connaissance, ni de l'ouvrage indiqué, ni de la continuation des extraits qu'on en promet dans le bulletin cité, je ne manquerai pas dans la suite d'examiner les cas dans lesquels

l'arc s et l'abscisse x expriment une ellipse, un cercle, une hyperbole, une hyperbole équilatère, ou enfin une cycloïde ou une logarithmique. Quoique ces recherches n'aient rien de remarquable du côté de l'analyse, elles ne seront pas cependant tout à fait denuées d'utilité si on les regarde comme un exercice pour les jeunes étudiants dans les nouvelles applications du calcul intégral à la théorie des courbes.

Soient donc x, y les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une courbe plane, et l'arc s soit exprimé par l'équation générale

$$s = \varphi(u).$$

Pour tirer de cette formule l'équation entre les coordonnées x, y, il suffit d'observer qu'outre la formule ordinaire

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

on a encore

$$ds = \varphi'(u)dx;$$

donc l'élimination donne

$$dy = dx\sqrt{(\varphi'^2(u) - 1)},$$

et en intégrant,

$$y = \int dx\sqrt{(\varphi'^2(u) - 1)} + C.$$

L'intégration sera plus ou moins facile selon la forme de $\varphi(u)$. Il nous sera donc utile d'introduire l'angle formé par la droite, qui touche la courbe en un des ses points, avec l'axe des y: cet angle que nous appellerons α, sera donné par la formule

$$dy = \cot\alpha\, dx$$

qui résulte encore des autres

$$dx = ds\sin\alpha, \qquad dy = ds\cos\alpha.$$

Mais d'ailleurs nous avons par la condition établie:

$$dx = \frac{ds}{\varphi'(u)};$$

on aura donc

$$\varphi'(u) = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha,$$

et reciproquement x sera fonction de α, c'est à dire

$$x = \psi(\operatorname{cosec}\alpha),$$

d'où l'on tire, en différenciant,

$$dx = -\psi'(\operatorname{cosec}\alpha)\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha.$$

Cette valeur étant substituée dans celle de dy, nous aurons, en intégrant,

$$y = -\int \psi'(\operatorname{cosec}\alpha)\frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\,d\alpha + C,$$

et en transformant le sinus et le cosinus en cosecante,

$$y = -\int \psi'(\operatorname{cosec}\alpha)\operatorname{cosec}\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)\,d\alpha + C.$$

L'intégrale de la formule précédente, avec la valeur de x, conduit par la voie de l'élimination à l'équation entre les coordonnées rectangulaires x et y. L'arc s sera donné en fonction de l'angle α par les expressions

$$s = \varphi(u) = \varphi(\psi(\operatorname{cosec}\alpha)) = P(\operatorname{cosec}\alpha).$$

Après celà il ne sera pas difficile de déterminer le rayon ϱ du cercle osculateur en partant de l'équation connue

$$\varrho = \pm\frac{ds}{d\beta},$$

où β est le complément de α. On aura donc

$$d\beta = -d\alpha, \qquad \varrho = \mp\frac{ds}{d\alpha}.$$

Or l'on tire des équations précédentes:

$$ds = \frac{dx}{\sin\alpha}, \qquad d\alpha = -\frac{\sin^2\alpha\,d\alpha}{\cos\alpha\,\psi'(\operatorname{cosec}\alpha)},$$

et en substituant:

$$\varrho = \pm\frac{\operatorname{cosec}^2\alpha\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)}}{\psi'(\operatorname{cosec}\alpha)}.$$

L'expression du rayon du cercle osculateur que nous avons trouvé se réduira à une fonction de x seul en éliminant l'angle α par le moyen des relations qui existent entre x et α. Avec la même facilité nous y parviendrons en faisant usage d'une autre expression du rayon du cercle osculateur où dx est constant. Cette expression est la suivante:

$$\varrho = \pm\frac{ds^3}{dx\,d^2y}.$$

Or les équations déjà établies donnent

$$ds^3 = (\varphi'(u))^3\,dx^3, \qquad d^2y = \frac{\varphi'(u)\varphi''(u)\,dx^2}{\sqrt{(\varphi'(u))^2 - 1}},$$

de manière qu'en substitant on obtient

$$\varrho = \frac{(\varphi'(u))^2}{\varphi''(u)}\sqrt{(\varphi'(u))^2 - 1}.$$

2°. Les formules précédentes peuvent être appliquées aisément si s est déterminé par les équations

$$s^2 = px, \qquad s = \sqrt{(px)},$$

d'où, en différenciant et divisant par ds, on tire

$$\frac{dx}{ds} = \frac{2\sqrt{(px)}}{p} = \sin\alpha,$$

et de là

$$x = \tfrac{1}{4}(p\sin^2\alpha), \qquad dx = \tfrac{1}{2}(p\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha).$$

En substituant cette expression de x dans celle de l'arc s, cette dernière devient

$$s = \tfrac{1}{2}p\sin\alpha.$$

La valeur de dx substitué dans celle de dy, donne aussi

$$dy = \tfrac{1}{2}p\cos^2\alpha\, d\alpha,$$

et en intégrant:

$$y = \tfrac{1}{2}p\int\cos^2\alpha\, d\alpha + C.$$

Avant de procéder à cette intégration très-facile, j'observe que l'équation différentielle de la courbe se trouve en faisant

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{(1-\sin\alpha)}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{(p^2-4px)}}{2\sqrt{(px)}},$$

et l'on aura

$$dy = \tfrac{1}{2}dx\sqrt{\left(\frac{p-4x}{x}\right)}.$$

L'intégration de la première formule, exprimée par α, est la plus facile, et on aura évidemment

$$y = \tfrac{1}{4}p(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) + C,$$

et comme pour $\alpha = 0$ on a $y = 0$, on aura $C = 0$, et x et y en fonction de α seront

$$y = a(2\alpha + \sin 2\alpha), \qquad x = a(1-\cos 2\alpha),$$

où pour abréger on a fait $p = 8a$. Les équations trouvées représentent évidemment une cycloïde dont le diamètre est $2a = \frac{1}{4}p$, et l'élimination de l'angle α nous donne l'équation connue

$$y = \sqrt{(2ax-x^2)} + a.\text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{a}\right).$$

Donc si, en partant de l'extremité supérieure de la cycloïde, on décrit une parabole dont le paramètre est le quadruple du diamètre du cercle générateur, les arcs correspondants de la cycloïde seront égaux aux ordonnées respectives de la parabole. Cette propriété ou cette rélation des deux courbes ne s'étend pas au delà du foyer de la parabole, car les ordonnées de la cycloïde deviennent imaginaires pour des valeurs de $x > 2a$ ou pour $x > \frac{1}{4}p$. Cette conséquence peut aussi se déduire en observant que l'arc s d'une cycloïde qui commence a l'extremité du diamètre $2a$ est exprimé par

$$s = 2\sqrt{(2ax)} \quad \text{ou} \quad s^2 = 8ax:$$

équation d'une parabole dont le paramètre est $p = 8a$, en prenant depuis l'extremité des abscisses autant de droites égales à $2\sqrt{(2ax)}$.

3°. L'application faite à une parabole de second ordre peut s'étendre à une parabole de l'ordre $m+n$, et dont l'équation est

$$s^{m+n} = p^n x^m,$$

d'où par la différenciation on a

$$(m+n)s^{m+n-1}\,ds = mp^n x^{m-1}\,dx.$$

En divisant par ds, et en y introduisant $\sin\alpha$, il viendra aisément:

$$\sin\alpha = \frac{(m+n)\,s^{m+n-1}}{mp^n x^{m-1}} = \frac{(m+n)\,x}{ms}.$$

En éliminant maintenant l'arc s au moyen de la première équation du présent No. on trouvera les *sinus* et *cosinus* en fonction de l'abscisse, c'est à dire

$$\sin\alpha = \frac{m+n}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{n}{m+n}} \quad \text{et}$$

$$\cos\alpha = \left[1 - \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2n}{m+n}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

d'où, en faisant pour abréger

$$q = p\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}},$$

on tire les valeurs suivantes de x et s exprimées par α:

$$x = \frac{m}{m+n}\,q(\sin\alpha)^{\frac{m+n}{n}}, \qquad s = q(\sin\alpha)^{\frac{m}{n}}.$$

Les valeurs des lignes trigonométriques *sinus* et *cosinus* déviendront fonctions de l'arc s en changeant l'abscisse x dans l'arc s et l'exposant $\frac{n}{m+n}$ en $\frac{n}{m}$. Des équations précédentes, en prenant la valeur de la *cotangente* en fonction de l'abscisse x, on tire l'équation différentielle de la courbe:

$$dy = \frac{\left[1 - \left(\frac{m}{m+n}\right)^n \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2n}{m+n}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{m+n}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{n}{m+n}}}.$$

Il n'est pas difficile de trouver l'équation différentielle entre α et y, laquelle sera plus commode pour les applications; la valeur précédente de x, différenciée

nous donne

$$dx = \frac{mq}{n}(\sin\alpha)^{\frac{m}{n}}\cos\alpha\, d\alpha,$$

et par conséquent

$$dy = \frac{mq}{n}(\sin\alpha)^{\frac{m}{n}-1}\cos^2\alpha\, d\alpha,$$

ou plus simplement

$$dy = q\cos\alpha\, d.(\sin\alpha)^{\frac{m}{n}}.$$

Les formules de ce No. sont celles que l'on trouve dans le *Bulletin* cité de Mr. *Ferussac.* L'intégrale de la formule précédente, avec la valeur de x, représente l'équation de la courbe demandée, et l'élimination de l'angle α fournira l'équation aux coordonnées rectangulaires. Enfin, pour obtenir la longueur du rayon du cercle osculateur, il suffira de différencier la valeur précédente de l'arc s, et de diviser le tout par $d\alpha$: il viendra

$$\varrho = \pm\frac{mq}{n}(\sin\alpha)^{\frac{m-n}{n}}\cos\alpha.$$

4°. Toutes les valeurs établies se simplifient en posant $n=1$, et en considérant ainsi une parabole de l'ordre $m+1$ dont l'équation est

$$s^{m+1} = px^m.$$

Comme on a non seulement

$$q = p\left(\frac{m}{1+m}\right)^m,$$

mais encore

$$s = q\sin^m\alpha, \qquad ds = mq\sin^{m-1}\alpha\cos\alpha\, d\alpha,$$

$$x = \frac{m}{1+m}q\sin^{m+1}\alpha, \qquad dx = mq\sin^m\alpha\cos\alpha\, d\alpha,$$

on aura pour l'angle α les deux équations

$$\sin\alpha = \frac{1+m}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{1+m}}, \qquad \cos\alpha = \left[1-\left(\frac{1+m}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{1+m}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

ou bien

$$\sin\alpha = \frac{1+m}{m}\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{m}}, \qquad \cos\alpha = \left[1-\left(\frac{1+m}{m}\right)^2\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

desquelles on tire l'équation différentielle

$$dy = \frac{\left[1+\left(\frac{1+m}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{1+m}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1+m}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{1+m}}}dx,$$

ou bien celle-ci:

$$dy = q \cos\alpha\, d.\sin^m\alpha = mq \sin^{m-1}\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha;$$

et enfin le rayon de courbure

$$\varrho = \pm mq \sin^{m-1}\alpha \cos\alpha.$$

L'intégrale trigonométrique qui exprime la valeur de l'ordonnée y, sera composée d'une suite de termes différents, selon que l'exposant m est pair ou impair, en observant que par les artifices connus de l'intégration par parties on pourra le décomposer dans les deux termes

$$y = q\left(\sin^m\alpha \cos\alpha + \int \sin^{m+1}\alpha\, d\alpha\right) + C.$$

Faisant $m+1=\nu$, m sera pair pour des valeurs impaires de ν, et impair pour des valeurs paires de ν, et on trouve pour des valeurs impaires de ν:

$$\int \sin^\nu\alpha\, d\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\nu}\left[\sin^{\nu-1}\alpha + \frac{\nu-1}{\nu-2}\sin^{\nu-3}\alpha + \frac{(\nu-1)(\nu-3)}{(\nu-2)(\nu-4)}\sin^{\nu-5}\alpha + \dots\right.$$
$$\left. + \frac{2.4\dots(\nu-3)(\nu-1)}{1.2.3\dots(\nu-4)(\nu-2)}\right] + C,$$

et pour le cas de ν pair,

$$\int \sin^\nu\alpha\, d\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\nu}\left[\sin^{\nu-1}\alpha + \frac{\nu-1}{\nu-2}\sin^{\nu-3}\alpha + \dots + \frac{3.4\dots(\nu-3)(\nu-1)}{2.4\dots(\nu-4)(\nu-2)}\sin\alpha\right]$$
$$+ \frac{1.3\dots(\nu-3)(\nu-1)}{2.4\dots\nu-2.\nu}\,\alpha + C:$$

formules qui dans les deux cas nous fournissent le moyen de calculer les ordonnées des courbes. Passons à des applications particulières.

5°. Soit $m=2$, nous aurons l'arc s donné par une parabole de troisième ordre, c'est à dire par l'équation

$$s^3 = px^2.$$

Or nous avons par les formules générales:

$$q = \tfrac{4}{9}p, \qquad x = \tfrac{2}{3}q\sin^3\alpha, \qquad s = q\sin^2\alpha,$$

et en outre

$$dy = 2q\sin\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha,$$

donc, en intégrant,

$$y = -\tfrac{2}{3}q\cos^3\alpha + C.$$

Mais à $\alpha = 0$ correspond $y = 0$, et par conséquent la constante C est $= \frac{2}{3}q$; l'intégrale complète sera donc

$$y = \tfrac{2}{3}q(1-\cos^3\alpha).$$

Enfin le rayon de courbure dévient

$$\varrho = 2q\sin\alpha\cos\alpha = q\sin 2\alpha.$$

Pour trouver aisément l'équation aux coordonnées rectangulaires x, y, faisons

$$\tfrac{2}{3}q - y = y'.$$

Effaçant l'accent, nous aurons les deux équations simultanées:

$$x = \tfrac{2}{3}q\sin^3\alpha, \qquad y = \tfrac{2}{3}q\cos^3\alpha,$$

et si l'on pose

$$A = \tfrac{2}{3}q = (\tfrac{2}{3})^3 p,$$

il viendra

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin\alpha, \qquad \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos\alpha,$$

et enfin, en élévant au carré, et sommant, nous aurons

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Telle est l'équation de la courbe dont les arcs sont égaux aux ordonnées correspondantes d'une parabole cubique. Elle est évidemment semblable à la développée de l'ellipse, quoique la forme de la courbe soit tout à fait différente; car pour la développée de l'ellipse on a

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

et il ne peut être $A = B$ sans que $A = 0 = B$. En outre, comme on a évidemment

$$\sin\alpha\cos\alpha = \left(\frac{xy}{A^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

l'expression très simple du rayon du cercle osculateur de cette courbe est

$$\varrho = 2q\left(\frac{xy}{A^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

6°. Supposant le nombre $m = 3$, on a entre l'arc s et l'abscisse x l'équation d'une parabole de quatrième ordre, c'est à dire l'équation

$$s^4 = p x^3,$$

et les équations ordinaires du No. 4. nous donnent

$$q = (\tfrac{3}{4})^3 p, \qquad s = q\sin^3\alpha, \qquad x = \tfrac{3}{4}q\sin^4\alpha,$$

avec lesquelles doit coëxister l'équation suivante:

$$dy = 3q\sin^2\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha$$

qui, étant integrée, donne

$$y = -\tfrac{3}{8}q\cdot\tfrac{1}{4}(\sin 4\alpha - 4\alpha) + C;$$

et comme à $\alpha = 0$ correspond $y = 0$, on aura $C = 0$, et la valeur de l'ordonnée y se présentera sous la forme suivante:

$$y = \tfrac{1}{8}(\tfrac{3}{4})^4 p(4\alpha - \sin 4\alpha),$$

à laquelle il faut toujours réunir la valeur de x trouvée après la substitution de q, ce qui donne

$$x = (\tfrac{3}{4})^4 p \sin^4\alpha.$$

L'élimination de l'angle α s'exécute en déduisant les deux formules

$$\sin\alpha = \sqrt[4]{\frac{x}{A}}, \qquad \alpha = \text{arc}\left(\sin = \sqrt[4]{\frac{x}{A}}\right)$$

de la précédente; où l'on a fait pour abréger

$$A = (\tfrac{3}{4})^4 p.$$

On formera ensuite les quantités 4α et $\sin 4\alpha$ pour les substituer dans la valeur de y. Nous pourrons cependant nous dispenser de chercher ces valeurs, et démontrer plutôt que la courbe dont il s'agit a quelque analogie avec la cycloïde. Si dans cette vue on transforme la quatrième puissance du sinus en cosinus des arcs doubles et quadruples, on obtiendra

$$x = \tfrac{1}{8}A(3 - 4\cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha),$$

et en supposant

$$x - \tfrac{1}{8}A(3 - 4\cos 2\alpha) = x',$$

nous aurons les deux équations

$$x' = a(1 - \cos 4\alpha'), \qquad y = a(4\alpha' + \sin 4\alpha'),$$

après avoir fait

$$4\alpha = 180 + 4\alpha', \qquad y' = y - 180^0 a, \qquad a = \tfrac{1}{8}A.$$

Ces équations pourraient représenter l'équation d'une cycloïde, si x' n'était pas une fonction simultanée de x et de l'angle α.

7°. Soit en outre, pour les applications plus nombreuses, le nombre $m = 4$, on aura une parabole de cinquième ordre

$$s^5 = px^4,$$

et les équations du No. 4., dont nous avons déjà plusieurs fois fait usage, nous donneront

$$q = (\tfrac{4}{5})^4 p,$$

et en même temps

$$s = (\tfrac{4}{5})^4 p \sin^4\alpha, \qquad x = (\tfrac{4}{5})^5 p \sin^5\alpha, \qquad dy = 4q \sin^3\alpha \cos^2\alpha \, d\alpha,$$

et en intégrant

$$y = \tfrac{4}{15} q \cos\alpha (3\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 2) + C.$$

Comme pour $\alpha = 0$ on a aussi $y = 0$, la constante sera

$$C = \tfrac{8}{15} q = \tfrac{2}{3}(\tfrac{4}{5})^5 p,$$

et la valeur de y est



$$y = \tfrac{1}{8} A((3\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 2)\cos\alpha + 2),$$

où

$$A = (\tfrac{4}{5})^5 p.$$

On devrait encore éliminer ici l'angle α au moyen de l'équation

$$\sin\alpha = \sqrt[5]{\frac{x}{A}},$$

et former ensuite les fonctions trigonométriques correspondantes; mais au lieu d'exécuter ce calcul, nous nous bornerons à faire voir comment cette courbe admet quelque analogie avec la courbe dont l'équation est

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{2}{5}} = 1.$$

En effet si dans la valeur de y on transforme $\sin^2\alpha$, $\sin^3\alpha$, $\sin^4\alpha$ en $\cos\alpha$, $\cos^3\alpha$, $\cos^5\alpha$, il vient l'expression

$$y = \tfrac{1}{8} A(2 + \tfrac{1}{4}(12\cos^5\alpha - 5\cos 3\alpha - 8\cos\alpha)),$$

à laquelle il faut réunir l'autre

$$x = A\sin^5\alpha.$$

Faisant ensuite

$$y - \tfrac{1}{8} A(2 - \tfrac{1}{4}(5\cos 3\alpha + 8\cos\alpha)) = y',$$

on aura les deux équations très simples

$$x = A\sin^5\alpha, \qquad y' = A\cos^5\alpha,$$

par lesquelles on obtient immédiatement l'équation

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{y'}{A}\right)^{\frac{2}{5}} = 1$$

qui représenterait une courbe comprise dans l'équation plus générale

$$\left(\frac{x}{A}\right)^m + \left(\frac{y}{A}\right)^m = 1,$$

si y' n'était pas une fonction simultanée de y et de α. On pourrait de cette manière pousser plus loin les applications pour les paraboles des ordres supérieures, mais il sera toutefois plus utile de les supprimer, et de diriger plutôt nos recherches aux lignes de second ordre, dont nous avons dejà traité l'exemple de la parabole Apollonienne. Nous choisirons une ellipse, et nous nous proposerons de chercher une équation telle de cette courbe que ses arcs soient égaux aux ordonnées de l'ellipse des arcs $2a$, $2b$.

8°. S'il entre l'arc s et l'abscisse x subsiste l'équation

$$\frac{x}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1,$$

elle nous donne, différenciée, et divisée par ds, d'après les dénominations établies:

$$\sin\alpha = -\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{s}{x} = -\frac{a}{b}\cdot\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{x},$$

d'où

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2\sin^2\alpha)}},$$

et ensuite

$$s = \mp\frac{b^2\sin\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2\sin^2\alpha)}}.$$

La valeur de x, différenciée, donne

$$dx = \mp\frac{a^2 b^2 \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha}{(a^2+b^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

et par conséquent l'équation différentielle entre x et y devient

$$dy = \mp\frac{a^2 b^2\cos^2\alpha\, d\alpha}{(a^2+b^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Intégrant cette dernière équation, et éliminant α au moyen de la valeur de x, on aurait l'équation de la courbe entre les coordonnées rectangulaires x, y: mais comme l'intégration ne peut s'executer que par approximation, nous déduirons des formules établies plusieurs conséquences. Faisant premièrement $a=b$, les formules précédentes se transforment en

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{(1+\sin^2\alpha)}}, \qquad s = \mp\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{(1+\sin^2\alpha)}},$$

et en même temps on a

$$dy = \mp\frac{a\cos^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{(1+\sin^2\alpha)}},$$

dont l'intégrale est également irréductible en termes finies, et pourrait dépendre d'une fonction elliptique de second espèce. Pour avoir quelque résultat élégant, appelons v un angle qui vérifie l'équation de l'ellipse par le moyen des formules

$$x = a\cos v, \qquad y = b\sin v$$

qui seront les équations polaires de la courbe. En les différenciant, nous aurons

$$dx = -a\sin v\, dv, \qquad dy = b\cos v\, dv.$$

Divisant la première par la seconde, on en tire la relation connue de l'angle α:

$$\sin\alpha = -\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin v}{\cos v},$$

d'où

$$\cot\alpha = -\frac{\sqrt{(b^2\cos^2 v - a^2\sin^2 v)}}{a\sin v}.$$

Cette valeur, substituée avec celle de dx dans l'équation entre y et α, donnera

$$dy = b\,dv\sqrt{(1-c^2\sin^2 v)},$$

où l'on a fait pour abréger

$$c^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2}.$$

L'intégrale de cette formule représente une fonction elliptique de second espèce, et devra subsister pour des valeurs telles de v que

$$1-c^2\sin^2 v > 0,$$

et par suite

$$\sin v < \frac{1}{c}.$$

L'hypothèse $a=b$ nous donne

$$\sin\alpha = -\operatorname{tang} v, \qquad dy = a\,dv\sqrt{(1-2\sin^2 v)} = a\,dv\sqrt{(\cos 2v)}.$$

On doit avoir $\sin v < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui correspond à $v < 45°$. Enfin, comme l'angle α est donné en fonction de v, de même l'angle v pourra être donné en fonction de α, et on aura évidemment les valeurs

$$\sin v = -\frac{b\sin\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2\sin^2\alpha)}}, \qquad \cos v = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2\sin^2\alpha)}}$$

qui, dans l'hypothèse $a=b$, se transforment en

$$\sin v = -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{(1+\sin^2\alpha)}}, \qquad \cos v = \frac{1}{\sqrt{(1+\sin^2\alpha)}}.$$

9°. Lorsque l'arc s est donné par l'équation d'une hyperbole dont l'origine est au centre, savoir par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{s^2}{b^2} = 1,$$

en différenciant cette équation, et en la divisant par dx, on aura toujours

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{x},$$

d'où l'on tire les valeurs suivantes de x et de s:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\alpha)}}, \qquad s = \frac{b^2\sin\alpha}{\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\alpha)}}.$$

Différenciant la première de ces équations, il viendra

$$dx = \frac{a^2b^2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{(a^2-b^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette valeur, substituée dans l'expression de dy, dont on a déjà fait usage plusieurs fois, donne

$$dy = \frac{a^2b^2\cos^2\alpha\,d\alpha}{(a^2-b^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette expression ne peut être intégrée que par approximation. L'intégrale dépend d'une fonction elliptique de seconde espèce. Dans l'hypothèse d'une hyperbole équilatère ou $a = b$, et par conséquent

$$x = \frac{a}{\cos v}, \qquad dx = \frac{a \sin\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

La valeur de dy devient donc

$$dy = \frac{a\, d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Intégrant, on a

$$y = \tfrac{1}{2} a \log\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right) + C,$$

et sous une autre forme:

$$y = a \log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) + C.$$

Pour trouver la constante, on doit observer que pour $\alpha = 0$ on a $y = 0$, et $C = 0$, et pour y on obtiendra par une transformation facile,

$$y = \tfrac{1}{2} a \log\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2.$$

Pour éliminer l'angle α, il faut premièrement passer des logarithmes aux nombres. On aura ainsi

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

et comme

$$\cos\alpha = \frac{a}{x}, \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x},$$

en chassant les radicaux, on trouvera

$$(a e^{\frac{y}{a}} - x)^2 = x^2 - a^2,$$

et de là évidemment

$$x = \tfrac{1}{2} a (e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}):$$

équation de la chaînette, dont les arcs sont égaux aux coordonnées respectives d'une hyperbole équilatère. L'introduction des coordonnées polaires pourra encore dans ce cas simplifier nos équations. En effet, en appelant v un angle ou une coordonnée polaire, nous remarquerons qu'on vérifie l'équation de l'hyperbole au moyen des valeurs

$$x = \frac{a}{\cos v}, \qquad s = b \operatorname{tang} v,$$

d'où, en différenciant, on tire

$$dx = \frac{a \sin v\, dv}{\cos^2 v}, \qquad ds = \frac{b\, dv}{\cos^2 v},$$

et en divisant on obtient

$$\sin\alpha = \frac{a\sin v}{b}, \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{(b^2 - a^2\sin^2 v)}}{b}.$$

Ces valeurs étant substituées dans la formule $dy = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}dx$ il vient

$$dy = \frac{dv}{\cos^2 v}\sqrt{(b^2 - a^2\sin^2 v)}:$$

équation non intégrable que par les séries. v doit être un angle pour lequel $\sin v < \frac{b}{a}$, et l'hypothèse $a = b$ nous donne de nouveau la formule déjà trouvée par le seul changement de v en α. Enfin il sera utile de faire voir comment on arrive plus facilement à ce dernier résultat en faisant usage immédiatement des remarques No. 2. En effet, pour l'hyperbole on a

$$\frac{ds}{dx} = \varphi'(u) = \frac{b}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}};$$

la valeur de y du No. cité devient

$$dy = \frac{dx\sqrt{(b^2 - a^2(x^2 - a^2))}}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}},$$

et si l'on substitue $x = \frac{a}{\cos v}$, on se trouve ramené à l'équation établie.

10°. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des équations des lignes algébriques; maintenant nous appliquerons cette théorie à plusieurs courbes transcendantes parmi lesquelles nous choisirons la cycloïde et la logarithmique. Si pour la première on suppose l'origine des coordonnées dans le point extrême du diamètre du cercle générateur qui divise la courbe en deux parties égales et semblables, l'équation différentielle entre l'arc s et l'abscisse x deviendra

$$ds = dw\sqrt{\left(\frac{2a - x}{x}\right)},$$

$2a$ étant le diamètre du cercle générateur: la derivée partielle de l'arc sera donc

$$\frac{ds}{dx} = \varphi'(u) = \sqrt{\left(\frac{2a - x}{x}\right)}.$$

Cette valeur étant substituée dans celle de x du No. 2., on aura aisément

$$dy = \sqrt{2}.dx\sqrt{\left(\frac{a - x}{x}\right)}.$$

Supposant

$$dy' = dx\sqrt{\left(\frac{a - x}{x}\right)},$$

cette équation représentera l'équation différentielle d'une cycloïde dont le diamètre est a. Donc pour décrire la courbe, dont les arcs soient égaux

aux ordonnées d'une cycloïde dont le diamètre est $2a$, il suffit de décrire une autre cycloïde de diamètre a, c'est à dire la moitié du précédent, et de prendre en même temps les ordonnées de cette dernière multipliées par $\sqrt{2}$. Nous serions parvenus aux mêmes conclusions en faisant usage des équations finies de la cycloïde; comme on le verra dans la suite.

En appelant en effet u un angle compris entre les limites 0 et π, les équations de la cycloïde seront, comme on sait,

$$x = a(1-\cos u), \qquad s = a(u+\sin u),$$

et l'élimination de l'angle u donnera l'équation

$$s = a.\mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{a}\right) + \sqrt{(2ax-x^2)}.$$

En différenciant les valeurs de x et de s et en les divisant, on aura

$$\sin\alpha = \frac{\sin u}{1+\cos u} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\left(\frac{x}{2a-x}\right)},$$

d'où

$$x = \frac{2a\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha},$$

et en différenciant,

$$dx = \frac{4a\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{(1+\sin^2\alpha)^2};$$

la valeur de dy deviendra donc

$$dy = \frac{4a\cos^2\alpha\,d\alpha}{(1+\sin^2\alpha)^2},$$

ou, en transformant les puissances du sinus et du cosinus en cosinus d'un arc double, on aura pour x:

$$x = \frac{2a(1-\cos 2\alpha)}{3-\cos 2\alpha},$$

et pour la valeur de dy:

$$dy = \frac{8a(1+\cos 2\alpha)\,d\alpha}{(3-\cos 2\alpha)^2}.$$

Intégrant cette dernière formule et éliminant l'angle α, on obtient l'équation entre x et y. Cependant on pourra exécuter l'intégration plus élégamment en introduisant l'angle u donné en fonction de α par les équations

$$\sin\alpha = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}u, \qquad \cos\alpha\,d\alpha = \frac{\tfrac{1}{2}du}{\cos^2\tfrac{1}{2}u};$$

la valeur de dy se transformera par là en

$$dy = 2a\,du\cos\tfrac{1}{2}u\,\sqrt{(\cos u)}.$$

Cette dernière formule sera rendue intégrable en appelant v un autre angle tel que l'on ait

$$\cos u = \cos^2\tfrac{1}{2}v,$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}u = \tfrac{1}{2}(\sqrt{(1-\cos^2\tfrac{1}{2}v)}) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}v}{\sqrt{2}}.$$

Différenciant en même temps, on aura les valeurs

$$\cos\tfrac{1}{2}u\,du = \frac{\cos\tfrac{1}{2}v\,dv}{\sqrt{2}}$$

qui, substituées, nous donnent

$$dy = a\sqrt{2}.\cos^2\tfrac{1}{2}v\,dv.$$

En intégrant on aura

$$y = \sqrt{2}.\tfrac{1}{2}a(v+\sin v),$$

la constante étant zéro à cause de $v=0$ pour $y=0$. Si maintenant on remarque que pour les valeurs déjà établies on a

$$1-\cos u = \tfrac{1}{2}(1-\cos v),$$

il sera aisé de voir qu'à l'expression de y doit correspondre celle-ci:

$$x = \tfrac{1}{2}a(1-\cos v).$$

Ces expressions représenteront les équations d'une cycloïde dont le diamètre est a, pourvu que l'on suppose $y=y'\sqrt{2}$. En éliminant v on aura donc

$$y' = \tfrac{1}{2}a\,\text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{(ax-x^2)}}{\tfrac{1}{2}a}\right)+(ax-x^2).$$

Enfin l'intégration de y par rapport à α nous réconduit aux résultats dejà trouvées. On aurait en effet

$$y = 4a\int\frac{(1+\cos 2\alpha)d.2\alpha}{(3-\cos 2\alpha)^2}$$

En vertu des formules connues du calcul intégral:

$$\int\frac{(1+\cos 2\alpha)d.2\alpha}{(3-\cos 2\alpha)^2} = \frac{4\sin 2\alpha}{8(3-\cos 2\alpha)}+\tfrac{4}{8}\int\frac{d.2\alpha}{3-\cos 2\alpha}$$

et

$$\int\frac{d.2\alpha}{3-\cos 2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{8}}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{\sin 2\alpha.\sqrt{8}}{3-\cos 2\alpha}\right),$$

d'où

$$y = 2a\left(\frac{\sin 2\alpha}{3-\cos 2\alpha}+\frac{1}{\sqrt{8}}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{\sin 2\alpha.\sqrt{8}}{3-\cos 2\alpha}\right)\right),$$

il devra subsister en même temps l'expression de x en fonction de l'angle α, et comme on déduit de cette dernière

$$\sin 2\alpha = \frac{2.\sqrt{(2x(a-x))}}{2a-x}, \qquad \cos 2\alpha = \frac{2a-3x}{2a-x},$$

substituant dans y on en tire

$$y = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}.\text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{(ax-x^2)}}{\tfrac{1}{2}a}\right)+\sqrt{2}.\sqrt{(ax-x^2)}:$$

expression tout à fait identique avec celle déjà trouvée.

11°. Supposant une logarithmique dont l'équation est

$$s = a \log x,$$

on en tire

$$\sin\alpha = \frac{x}{a},$$

d'où

$$x = a\sin\alpha, \qquad dx = a\cos\alpha\, d\alpha,$$

et en même temps

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a};$$

l'équation différentielle de la courbe sera donc

$$dy = a\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}d\alpha.$$

En intégrant on aura

$$y = a(\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\alpha) + C.$$

Soit b l'ordonnée correspondante à $\alpha = 90^0$, la constante est $C = b$; donc l'intégrale complète est

$$y = a(\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\alpha) + b,$$

qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$y - b - a\cos\alpha = a\log\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Substituant ici $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en fonction de x et passant des logarithmes aux nombres, on obtient

$$e^{\frac{y-b-\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}} = \frac{x}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Telle est l'équation de la courbe dont les arcs sont égaux aux ordonnées correspondantes d'une logarithmique

Si l'on fait usage de l'équation

$$s = e^{\frac{x}{a}},$$

on a

$$\sin\alpha = \frac{a}{e^{\frac{x}{a}}},$$

d'où

$$x = a\log\frac{a}{\sin\alpha}, \qquad dx = -\frac{a\cos\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha},$$

et l'équation différentielle entre y et α devient

$$dy = -a\cot^2\alpha\, d\alpha.$$

L'intégrale de celle-ci est évidemment

$$y = a(\alpha + \cot\alpha) + C.$$

Or pour déterminer la constante, soit b l'ordonnée correspondante à $=90$ $=\frac{1}{2}\pi$, on aura
$$C = b - \tfrac{1}{2}a\pi.$$
Faisant cette substitution et supposant en outre
$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha = \beta,$$
on obtiendra pour intégrale complète
$$y = a(\operatorname{tang}\beta - \beta) + b.$$
Or la valeur précédente de $\sin\alpha$ nous donne
$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\sqrt{(e^{\frac{2x}{a}} - a^2)}}{a};$$
l'équation résultante entre x et y sera donc donnée par l'expression
$$b - y + \sqrt{(e^{\frac{2x}{a}} - a^2)} = a.\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{(e^{\frac{2x}{a}} - a^2)}}{a}\right),$$
ou bien par
$$\sqrt{(e^{\frac{2x}{a}} - a^2)} = a\operatorname{tang}\left(\frac{b - y + \sqrt{(e^{\frac{2x}{a}} - a^2)}}{a}\right).$$
On pourrait d'une manière semblable étendre ces propositions à d'autres exemples. Mais sans nous occuper d'autres développements, nous croyons plus utile de procéder à la détermination des équations des courbes développantes: c'est ce qui formera le sujet des Nos. suivants de ce mémoire.

Sur les équations des développantes de plusieurs courbes planes considérées dans les 8 numeros précédents de ce mémoire.

12°. Représentant par l'expression ordinaire et générale
$$y = f(x)$$
l'équation d'une courbe rapportée à des axes rectangulaires, et appelant X, Y les coordonnées du centre du cercle osculateur, ϱ le rayon et s l'arc de la courbe correspondante, on sait que l'on a les équations
$$\frac{Y-y}{dx} = \frac{\varrho}{ds}, \quad \frac{X-x}{dy} = -\frac{\varrho}{ds},$$
au moyen desquelles on parvient par l'élimination de x, y à une rélation entre X, Y qui appartient à tous les centres des cercles osculateurs, et qui sera par conséquent évidemment l'équation de la développée. Si au contraire l'équation entre X, Y était connue, on pourrait éliminer ces coordonnées et trouver ainsi une équation entre x, y qui seroit celle de la développante de la courbe représentée par l'équation donnée et de la développée de la courbe représentée par l'équation précédente. Il est essentiel de remarquer que

toutes les développées sont des courbes rectificables, car leurs arcs sont égaux aux rayons osculateurs de la développante, ou n'en différent que d'une quantité constante. Cela posé, si l'on appelle x, y, s les coordonnées et l'arc de la développée, X, Y, R, S les coordonnées, le rayon osculateur et l'arc de la développante, les formules précédentes se changeront dans les suivantes:

$$\frac{y-Y}{dX} = \frac{R}{dS}, \quad \frac{x-X}{dY} = -\frac{R}{dS},$$

auxquelles il faut ajouter

$$dR = ds.$$

En outre les directions des rayons osculateurs étant les droites qui touchent la développée, il suit qu'en appelant α l'angle que l'axe des y forme avec une droite qui touche la courbe développée dans le point x, y, on devra avoir

$$\frac{dy}{dx} = \cot\alpha = -\frac{dX}{dY},$$

et posant l'origine des coordonnées à l'extremité de l'arc s, on aura seulement

$$R = s, \qquad \frac{dY}{dX} = -\operatorname{tang}\alpha,$$

et en même temps

$$\frac{dX}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dY}{ds} = -\sin\alpha.$$

De ces valeurs on tire immédiatement les expressions des coordonnées X, Y, savoir

$$Y = y - s.\cos\alpha, \quad X = x - s.\sin\alpha.$$

Or si l'on connait les expressions de x, y, s en fonctions de l'angle α, on pourra par l'élimination de cet angle parvenir à l'équation de la courbe développante.

13°. Pour appliquer les formules précédentes à un cas très-simple, supposons que x, y satisfont l'équation d'un point

$$x = a, \quad y = b.$$

On pourra prendre

$$s = \sqrt{(a^2+b^2)},$$

et les dernières équations du No. 12. donneront

$$Y-b = -s.\cos\alpha, \quad X-a = -s.\sin\alpha,$$

d'où l'on a évidemment

$$(X-a)^2+(Y-b)^2 = a^2+b^2:$$

équation d'un cercle, si l'origine des coordonnées est dans un point de la circonférence.

14°. Avant de passer à d'autres applications, il sera utile de remarquer que la différenciation des valeurs de X, Y donne seulement

$$dY = s.\sin\alpha\, d\alpha, \qquad dX = -s.\cos\alpha\, d\alpha;$$

par conséquent l'arc S de la développante sera déterminé par la formule

$$dS = \sqrt{(dX^2 + dY^2)} = \pm s\, d\alpha$$

qui nous apprend que le rayon du cercle osculateur de la développante est égal a l'arc correspondant de la développée. Choisissant maintenant les équations des développantes dans lesquelles l'arc s exprime une parabole de l'ordre $m+n$, c'est à dire où

$$s^{m+n} = p^n x^m,$$

nous n'aurons qu'à substituer les valeurs de x, y, s en fonction de l'angle α, déterminées déjà dans le No. 3., dans les dernières équations du No. 12. Il en résultera

$$X = \frac{n}{m+n} q (\sin\alpha)^{\frac{m+n}{n}}, \quad Y = \frac{mq}{n} \int (\sin\alpha)^{\frac{m}{n}-1} \cos^2\alpha\, d\alpha - q (\sin\alpha)^{\frac{m}{n}} \cos\alpha.$$

Cela donne aisément les différentielles correspondantes

$$dX = q(\sin\alpha)^{\frac{m}{n}} \cos\alpha\, d\alpha, \qquad dY = (\sin\alpha)^{\frac{m+n}{n}} d\alpha.$$

On aura donc pour l'arc S:

$$dS = q(\sin\alpha)^{\frac{m}{n}} d\alpha,$$

où la quantité q est, comme dans le No. 3.,

$$q = p\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Ces formules se simplifient encore en supposant $n=1$; alors on obtient pour la courbe développée, pour laquelle

$$s^{m+1} = p x^m:$$

les valeurs

$$X = \frac{1}{m+1} q (\sin\alpha)^{m+1}, \qquad Y = mq \int \sin^{m-1} \cos^2\alpha\, d\alpha - q \sin^m\alpha \cos\alpha,$$

et en même temps

$$S = q \int \sin^m \alpha\, d\alpha.$$

On tire de ces dernières ce qu'on a trouvé dans le premier exemple. En supposant $m=0$, on obtiendra les équations

$$s = p, \qquad X = q\sin\alpha, \qquad Y = -q\cos\alpha, \qquad S = q\alpha$$

qui renferment celle du cercle

$$X^2 + Y^2 = q^2.$$

Il ne sera pas inutile de remarquer que pour $m=0$ le coëfficient de p dans l'expression prend la forme indéterminée 0^0. Pour en trouver

dans ces cas la valeur véritable, il suffit d'observer que si pour des valeurs particulières de y, z une fonction y^z prend la forme 0^0, on en trouve la véritable valeur en calculant l'expression

$$e^{-\frac{y'z}{z'y}},$$

y', z' étant les dérivées de y, z, et e la base des logarithmes hyperboliques *). De cette manière, en faisant

$$y = \frac{m}{m+1}, \quad z = m,$$

la différenciation par rapport à m donne

$$y' = \frac{1}{(m+1)^2}, \quad z' = 1,$$

et l'exponentielle en question se change en

$$e^{-\frac{m}{m+1}}$$

qui pour $m = 0$ sera égal à l'unité, et par conséquent $q = p$.

15°. Si l'on prend pour second exemple $m = 1$, on a pour la cycloïde développée les équations du No. 2., c'est à dire

$$y = \tfrac{1}{8}p(2\alpha + \sin 2\alpha), \quad x = \tfrac{1}{8}p(1 - \cos 2\alpha) \quad \text{et} \quad s = \tfrac{1}{2}p \sin\alpha;$$

par conséquent les équations ordinaires de la développante du No. 12. deviennent

$$Y = \tfrac{1}{8}p(2\alpha - \sin 2\alpha), \quad X = -\tfrac{1}{8}p(1 - \cos 2\alpha)$$

qui appartiennent évidemment à une cycloïde du même diamètre que la cycloïde développée; la cycloïde est donc la développée elle même.

16°. Supposons $m = 2$ pour la courbe développée, on aura l'arc $s^3 = px^2$, et l'équation sera

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Prenant ensuite les valeurs de x, y, s qu'on trouve dans le No. 5. En les substituant dans les expressions de X, Y dont on a déjà fait usage, on en tire pour les équations de la courbe développante:

$$Y = \tfrac{2}{3}q(1 - \cos^3\alpha) - q\sin^2\alpha\cos\alpha, \quad X = -\tfrac{1}{3}q\sin^3\alpha;$$

d'où par l'élimination de α on obtient la rélation cherchée entre X, Y. Enfin l'arc S de cette courbe sera donné par l'expression

$$S = q\int \sin^2\alpha\, d\alpha = \tfrac{1}{4}q(2\alpha - \sin 2\alpha).$$

17°. Prenant pour équations de la développée les suivantes:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2\sin^2\alpha)}}, \quad y = a^2b^2\int\frac{\cos^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{(a^2 - b^2\sin^2\alpha)^3}},$$

*) Voir *Cauchy* Calcul différentiel pag. 45. Paris, 1829.

où l'arc s exprime une hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1,$$

et en même temps

$$s = \frac{b^2 \sin\alpha}{\sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2\alpha)}};$$

la substitution de ces valeurs donne

$$Y = a^2 b^2 \int \frac{\cos^2\alpha \, d\alpha}{\sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2\alpha)^3}} - \frac{b^2 \sin\alpha \cos\alpha}{\sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2\alpha)}}.$$

Pour trouver la forme de l'intégrale qui appartient à Y, différencions cette dernière quantité, ou bien, substituons la valeur de s dans la première formule du No. 12.; cela nous donnera

$$dY = \frac{b^2 \sin^2\alpha \, d\alpha}{\sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2\alpha)}},$$

et en faisant pour abréger $\frac{b^2}{a^2} = c^2$,

$$dY = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\sin^2\alpha \, d\alpha}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\alpha)}}.$$

En faisant usage de la notation des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce dont *Legendre* s'est servi, savoir

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\alpha)}} = F(c, \alpha), \qquad \int d\alpha \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\alpha)} = E(c, \alpha),$$

on aura l'intégrale de dy par la formule

$$Y = a(F(c, \alpha) - E(c, \alpha)).$$

La coëxistence de cette formule avec celle qui donne X représente l'équation de la développante de la courbe de laquelle on tire l'équation d'une hyperbole entre l'arc et l'abscisse. Dans l'hypothèse d'une hyperbole équilatère on a $a = b$, et alors

$$F(c, \alpha) = \int \frac{d\alpha}{\cos\alpha}, \qquad E(c, \alpha) = \int \cos\alpha \, d\alpha,$$

par conséquent, outre

$$X = a \cos\alpha,$$

on a aussi

$$X = a\left(\tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}\right) - \sin\alpha\right).$$

Pour éliminer l'angle α, il suffit de remarquer que

$$Y + a \sin\alpha = a \log\left(\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}\right),$$

et en même temps

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(a^2 - X^2)}}{a},$$

par conséquent

$$Y + \sqrt{(a^2 - X^2)} = a \log\left(\frac{a + \sqrt{(a^2 - X^2)}}{X}\right).$$

Telle est la développante de la chaînette dont l'équation est

$$x = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right).$$

18°. Cherchons enfin la développante de la courbe pour laquelle entre l'arc s et l'abscisse x subsiste l'équation d'une logarithmique, c'est à dire

$$s = a \log x.$$

Par les formules du No. 11. on a

$$s = a\log(\sin\alpha), \qquad x = a\sin\alpha, \qquad y = b + a(\log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\alpha).$$

La substitution de ces valeurs dans les expressions déjà obtenues de X, Y donne

$$Y = b + a(\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\alpha) - a\cos\alpha\log(\sin\alpha),$$
$$X = a\sin\alpha - a\sin\alpha\log(\sin\alpha).$$

L'existence de ces deux équations et l'élimination de l'angle α donne pour l'équation de la développante de la courbe:

$$e^{\frac{y-b-\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}} = \frac{x}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Si l'on avoit choisi la logarithmique de la forme

$$s = e^{\frac{x}{a}},$$

alors, puisque comme au No. 11.

$$x = a\log\frac{a}{\sin\alpha}, \qquad s = \frac{a}{\sin\alpha}, \qquad y = b - \tfrac{1}{2}(a\pi) + a(\alpha + \cot\alpha),$$

on auroit trouvé pour X et Y:

$$Y = b - \tfrac{1}{2}(\pi\alpha) + a\alpha, \qquad X = a\log\frac{a}{\sin\alpha} - a;$$

et en faisant $\frac{1}{2}\pi - \alpha = \beta$, on aura plus simplement

$$Y = b + a\beta, \qquad X = a\log\frac{a}{\cos\beta} - a.$$

On tire de ces équations, en passant des logarithmes aux nombres,

$$e^{\frac{X+a}{a}} = \frac{a}{\cos\beta}, \qquad \beta = \frac{Y-b}{a},$$

d'où enfin

$$e^{\frac{X+a}{a}} = \frac{a}{\cos\left(\frac{Y-b}{a}\right)} = a\sec\left(\frac{Y-b}{a}\right).$$

La développée de cette courbe a pour équation

$$\sqrt{(e^{\frac{2x}{a}} - a^2)} = a\operatorname{tang}\left(\frac{b-y+\sqrt{(e^{\frac{2x}{a}}-a^2)}}{a}\right):$$

dernière formule du No. 11.

Rome 11. Mars 1843.

21.
Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Hrn. Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Br.)

(Fortsetzung von Nr. 16. im vorigen Hefte dieses Bandes.)

---

§. 14.

In einer Urne befinden sich m Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 .... m bezeichnet sind. Es wird p mal gezogen und jedesmal eine Kugel herausgenommen, die man nach der Ziehung in die Urne zurückwirft. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summe der auf den gezogenen Kugeln eingezeichneten Zahlen gerade s beträgt?

Die Anzahl der günstigen Fälle kommt, wie leicht zu sehen, mit der Zahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe s aus den Elementen a_1, a_2, a_3, ... a_m zur $p$ten Classe gebildet werden. Diese Gruppen-Anzahl ist in der Combinationslehre §. 20. Nr. 50. Seite 39 angegeben. Wir benutzen jedoch die dort gegebene Entwicklungsweise nicht, sondern wählen zur Auffindung der dem Unternehmen günstigen Gruppen-Anzahl eine andere Methode, die wir in der Schrift „Die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren Elementarreihen. Freiburg, 1840." angegeben haben. Sie beruht auf der Bemerkung, dafs die Entwicklung der Polynomien, die nach den steigenden Potenzen einer Grundgröfse geordnet sind, auf Ausdrücke führen, in welchen die Vorzahlen der erhaltenen Glieder die Gruppen oder die Gruppen-Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu der Summe, welche der Exponent des zugehörigen Gliedes angiebt und zu der Classe bilden, welche die Potenz ausweiset, zu welcher das gegebene Polynomium erhoben werden soll. Bei dieser Entwicklung entstehen die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen, wenn die Glieder des zu entwickelnden Polynomiums mit den Elementen einer oder mehrerer Reihen verbunden sind, nach der Formel

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots a_m x^m)^p = P'(sp;\quad a_1, a_2, \dots a_m)^p x^p$$
$$+ P'(s(p+1);\ a_1, a_2, \dots a_m)^p x^{p+1}$$
$$+ P'(s(p+2);\ a_1, a_2, \dots a_m)^p x^{p+2},$$

oder es entstehen die Gruppen-Anzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen, wenn die Glieder des zu entwickelnden Polynomiums nicht mit den Elementen einer Reihe verbunden sind, folgendem Ausdrucke gemäfs:

$$(x + x^2 + x^3 + \dots x^m)^p = P'[sp]^p x^p + P'[s(p+1)]^p x^{p+1} + P'[s(p+2)^p]^p x^{p+2} \dots$$
$$\dots P'[sz]^p x^z + \dots$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_m),$$

wobei man Elemente der untergeschriebenen Reihe zu suppliren oder die Exponenten der ordnenden Gröfse x als Stellenzahlen der Elemente einer Reihe sich vorzustellen hat.

Kommen mehrere Elementenreihen in Betracht, so ändert dies die Entwicklungsweise nicht, und die Formel

$$[(a_1 + b_1 + c_1)x + (a_2 + b_2 + c_2 + d_2)x^2 + (a_3 + b_3 \dots e_3)x^3 + \dots (a_m + b_m + \dots k_m)x^m]^p$$
$$= P'(sp)^p x^p + P'(s(p+1))^p x^{p+1} + P'(s(p+2)^p x^{p+2} + \dots P(sz)^p x^z + \dots$$
$$(a_1, a_2, \dots a_m;\ b_1, b_2, \dots b_m;\ c_1, c_2, \dots c_m;\ d_2, d_3 \dots d_m;\ e_3, e_4 \dots e_m;\ \dots k_m)$$

giebt Glieder, deren Vorzahlen die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen in der $p$ten Classe zu den verschiedenen Summen aus den untergeschriebenen Elementenreihen geben. Der Ausdruck

$$(3x + 4x^2 + 5x^3 + \dots kx^m)^p = P'[sp]^p x^p + P'[s(p+1)]^p x^{p+1}$$
$$+ P'[s(p+2)]^p x^{p+2} + \dots$$

giebt Glieder, deren Vorzahlen die Ausdrücke für die Gruppen-Anzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen in der $p$ten Classe zu den verschiedenen Summen aus den oben untergeschriebenen Elementenreihen bilden. Sollten im letztern Falle die Elemente nicht angegeben sein, so sind sie aus den Vorzahlen der nicht entwickelten Darstellung nach den vorliegenden Beziehungen leicht abzuleiten: denn es sind so viele Einheiten irgend einer Potenz der ordnenden Gröfse vorzuschreiben, als Elemente mit ihr verbunden werden würden, wenn die ursprüngliche Darstellung gegeben wäre.

Um nun die Zahl der günstigen Kugelgruppen nach diesen Bemerkungen zu bestimmen, ist das Polynomium

$$P = (x + x^2 + x^3 + \dots x^m)^p = \left(\frac{x - x^{m+1}}{1-x}\right)^p = (1-x^m)^p \cdot \frac{x^p}{(1-x)^p}$$

zu entwickeln und die Vorzahl zu bestimmen, welche dem Gliede x^s zu-

gehört. Es ist bekanntlich

$$\frac{x^p}{(1-x)^p} = \frac{(p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^p + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^{p+1} + \frac{(p+1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^{p+2} + \frac{(p+2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^{p+3} + \ldots.$$

und

$$(1-x^m)^p = 1 - \frac{p}{1}\,x^m + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\,x^{2m} - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|-1}}\,x^{3m} - \frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}}\,x^{4m} - \ldots.,$$

also

$$P = (1-x^m)^p\,\frac{x^p}{(1-x)^p} = \left(1 - px^m + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\,x^{2m} - \ldots.\right)\left(\frac{(p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^p + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^{p+1} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{1}{1^{p-1|1}}\Big[(p-1)^{p-1|-1}\,x^p + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^{p+1} + \frac{(p+1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^{p+2} + \frac{(p+2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\,x^{p+3} + \ldots.$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
+(m+p-1)^{p-1|-1} & x^{m+p} + (m+p)^{p-1|-1} & x^{m+p+1} + (m+p+1)^{p-1|-1} & x^{m+p+2} + \ldots. \\
-\frac{p}{1}(p-1)^{p-1|-1} & \quad -\frac{p}{1}\,p^{p-1|-1} & \quad -\frac{p}{1}(p+1)^{p-1|-1} & \quad - \ldots. \\
& & & \\
+(2m+p-1)^{p-1|-1} & x^{2m+p} + (2m+p)^{p-1|-1} & x^{2m+p+1} + (2m+p+1)^{p-1|-1} & x^{2m+p+2} + \ldots. \\
-\frac{p}{1}(m+p-1)^{p-1|-1} & \quad -p(m+p)^{p-1|1} & \quad -\frac{p}{1}(m+p+1)^{p-1-|1} & \\
+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(p-1)^{p-1|-1} & \quad +\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\,p^{p-1|-1} & \quad +\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(p+1)^{p-1|-1} &
\end{array}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big].$$

Aus dieser Formel läfst sich nun leicht die Form der Vorzahl von x^s und damit die gesuchte Gruppen-Anzahl abnehmen. Sie ist

$$1.\quad A = P'[s(s);\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_m]^p$$
$$= \frac{1}{1^{p-1|1}}\Big[(s-1)^{p-1|-1} - \frac{p}{1}(s-m-1)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m-1)^{p-1|-1} - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}(s-3m-1)^{p-1|-1} + \ldots.\Big].$$

Diese Reihe bricht ab, wenn ein Glied negativ wird, oder in 0 übergeht. Wird die Gleichung 1. durch die Zahl aller möglichen Gruppen m^p gemessen, so ergiebt sich für die gesuchte Wachrscheinlichkeit

$$2.\quad w = \frac{1}{1^{p-1|1}.\,m^p}\Big[(s-1)^{p-1|-1} - \frac{p}{1}(s-m-1)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m-1)^{p-1|-1} - \ldots.\Big].$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summen der auf den gezogenen Kugeln sich zeigenden Zahlen entweder s oder eine der niedrigeren sind?

Die Zahl der günstigen Fälle wird sich ergeben, wenn wir in die Gleichung 1. allmälig die Werthe p, $p+1$, $p+2$, ... s statt s setzen,

die hiedurch entstandenen Ausdrücke zusammenzählen und dann durch die Zahl m^p aller möglichen Fälle theilen. Dies giebt folgende Zusammenstellung:

$$3.\quad A = \frac{1}{1^{p-1|1}}\Big[(p-1)^{p-1|-1}$$
$$\begin{array}{l}
+p^{p-1|-1} \\
+(p+1)^{p-1|-1} \\
\cdots\cdots\cdots \\
+(m+p-1)^{p-1|-1} - p(p-1)^{p-1|-1} \\
+(m+p)^{p-1|-1} \quad - p.p^{p-1|-1} \\
+(m+p+1)^{p-1|-1} - p(p+1)^{p-1|-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+(2m+p-1)^{p-1|-1} - p(m+p-1)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(p-1)^{p-1|-1} \\
+(2m+p)^{p-1|-1} \quad - p(m+p)^{p-1|-1} \quad + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}p^{p-1|-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+(s-1)^{p-1|-1} \quad - p(s-m-1)^{p-1|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m-1)^{p-1|-1} - \ldots\Big].
\end{array}$$

Werden die Verticalreihen dieser Formel summirt, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Gruppen-Anzahl:

$$4.\quad A = \frac{1}{1^{p|1}}\Big[s^{p|-1} - p(s-m)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m)^{p|-1} - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}(s-3m)^{p|-1} + \ldots\Big].$$

Die Wahrscheinlichkeit wird

$$5.\quad w = \frac{1}{1^{p|1}m^p}\Big[s^{p|-1} - p(s-m)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m)^{p|-1} - \ldots\Big]$$

sein; s kann sich hierin von p bis zu pm erheben.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summen der auf den gezogenen Kugeln erscheinenden Zahlen zwischen q und s liegen, also eine der Summen $q+1$, $q+2$, $q+3$, ... s sind?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn wir diejenige, dafs Kugeln erscheinen, deren Zahlen die Summe q oder eine geringere Summe bilden, vorerst angeben und sie dann von der in 5. ausgedrückten abziehen. Die erstere findet sich, wenn q statt s in 5. gesetzt wird. Dies giebt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$6.\quad w = \frac{1}{1^{p|1}m^p}\left[s^{p|-1} - p(s-m)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s-2m)^{p|-1} - \ldots\right]$$
$$- \frac{1}{1^{p|1}m^p}\left[q^{p|-1} - p(q-m)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(q-2m)^{p|-1} - \ldots\right].$$

Sind die Kugeln mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, ... m bezeichnet, so bleiben die Schlüsse ungeändert. Die Zahl der Kugeln erhöht sich um die Einheit und die Summe um die Classenzahl; nach 41. §. 18. d. Combinationslehre. Die Wahrscheinlichkeiten, Kugeln zu ziehen, deren Zahlen eine bestimmte Summe oder den Inbegriff mehrerer Summen geben, gehen nach den angegebenen Modificationen in andere über. Aus 2. wird

$$7.\quad w = \frac{(s+p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(m+1)^p} - \frac{p(s+p-m-2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(m+1)^p} + \frac{p^{2|-1}(s+p-m-3)^{p-1|-1}}{1.2.1^{p-1|1}(m+1)^p} - \ldots$$

Aus 5. wird

$$8.\quad w = \frac{1}{1^{p|1}(m+1)^p}\left[(s+p)^{p|-1} - p(s+p-m-1)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m-2)^{p|-1} - \ldots\right].$$

Aus 6. wird

$$9.\quad w = \frac{1}{1^{p|1}(m+1)^p}\left[(s+p)^{p|-1} - p(s+p-m-1)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m-2)^{p|-1} - \ldots\right].$$
$$- \frac{1}{1^{p|1}(m+1)^p}\left[(q+p)^{p|-1} - p(q+p-m-1)^{p|-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(q+p-2m-2)^{p|-1} - \ldots\right].$$

Diese Gleichungen lassen sich unter andern auf das Zahlensystem anwenden. Sind in einer Urne die Zahlen, welche aus p Ziffern und weniger bestehen, enthalten, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, deren Ziffern die Summe s betragen, wenn $m = 9$ in 7. gesetzt und das Resultat durch die Anzahl $10^p - 1$ aller Zahlen, welche p oder weniger Ziffern haben, gemessen wird. Demnach ist

$$10.\quad w = \frac{(s+p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(10^p-1)} - \frac{p(s+p-11)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(10^p-1)} + \frac{p^{2|-1}(s+p-21)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}(10^p-1)} - \ldots$$

u. s. w. So ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, welche alle sechsstelligen und niedrigere Ziffern enthält, eine Zahl zu ziehen, deren Ziffern die Summe 25 betragen, $\frac{39482}{999999}$; die aber, eine Zahl zu ziehen, deren Ziffern die genannte Summe oder eine niedrigere betragen, ist $\frac{254808}{999999}$ u. s. w.

§. 15.

In einer Urne sind r Arten von Kugeln enthalten, jede mit einer beliebig grofsen Anzahl von Kugeln. Den Kugeln erster Art sind die Zahlen k_1+1, k_1+2, k_1+3, ... m_1, denen zweiter Art die Zahlen k_2+1, k_2+2, k_2+3, ... m_2 u. s. w., denen $r$ter Art die Zahlen k_r+1, k_r+2, k_r+3, ... m_r aufgeschrieben. Man zieht p mal und nimmt jedesmal eine Kugel heraus, die nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die auf den gezogenen Kugeln aufgeschriebenen Zahlen die Summe s betragen werden?

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen kommt mit der Anzahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus r Elementenreihen, welche auf die in der Frage angegebene Weise beschränkt sind, zur Summe s in der $p$ten Classe gebildet werden. Benutzt man nun die im vorigen Paragraph angegebene Methode, so hat man die Vorzahl von x^s in der entwickelten Darstellung des Polynomiums

$$P^p = [x^{k_1+1}+x^{k_1+2}+x^{k_1+3}+\ldots.+x^{m_1}+x^{k_2+1}+x^{k_2+2}+\ldots.x^{m_2}+\ldots$$
$$\ldots+x^{k_r+1}+x^{k_r+2}+x^{k_r+3}+\ldots.x^{m_r}]^p$$

zu suchen. Die Glieder des vorstehenden Polynomiums lassen sich auf eine einfachere Form bringen, und es ist

$$P^p = \left[\frac{x^{k_1+1}-x^{m_1+1}}{1-x}+\frac{x^{k_2+1}-x^{m_2+1}}{1-x}+\frac{x^{k_3+1}-x^{m_3+1}}{1-x}+\ldots.\frac{x^{k_r+1}-x^{m_r+1}}{1-x}\right]^p$$
$$= \frac{x^p}{(1-x)^p}[x^{k_1}+x^{k_2}+x^{k_3}+\ldots.x^{k_r}-x^{m_1}-x^{m_2}-x^{m_3}-\ldots.x^{m_r}]^p.$$

Benutzen wir die im vorigen Paragraph angegebene Entwicklung von $\frac{x^p}{(1-x)^p}$, so ergiebt sich

$$P^p = \frac{1}{1^{p-1|1}}(x^p+p^{p-1|-1}x^{p+1}+(p+1)^{p-1|-1}x^{p+2}+(p+2)^{p-1|-1}x^{p+3}+\ldots.)$$
$$\times\Big(x^{k_1p}-\frac{p}{1}x^{(p-1)k_1}(x^{m_1}+x^{m_2}+\ldots.x^{m_r}-x^{k_2}-x^{k_3}-x^{k_4}-\ldots.x^{k_r})$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}x^{(p-2)k_1}(x^{m_1}+x^{m_2}+\ldots.x^{m_r}-x^{k_2}-x^{k_3}-x^{k_4}-\ldots.x^{k_r})^2$$
$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}x^{(p-3)k_1}(x^{m_1}+x^{m_2}+\ldots.x^{m_r}-x^{k_2}-x^{k_3}-x^{k_4}-\ldots.x^{k_r})^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big).$$

Werden die angezeigten Entwicklungen ausgeführt und wird die hieraus sich ergebende Vorzahl von x^s abgeleitet, so erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$2.\quad A = \frac{1}{1^{p-1|1}}\Big\{(s-k_1p-1)^{p-1|-1}$$

$$-\frac{p}{1}\Big[(s-(p-1)k_1-m_1-1)^{p-1|-1} - (s-(p-1)k_1-k_2-1)^{p-1|-1}$$

$$+(s-(p-1)k_1-m_2-1)^{p-1|-1} - (s-(p-1)k_1-k_3-1)^{p-1|-1}$$

$$+(s-(p-1)k_1-m_3-1)^{p-1|-1} - (s-(p-1)k_1-k_4-1)^{p-1|-1}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+(s-(p-1)k_1-m_r-1)^{p-1|-1} - (s-(p-1)k_1-k_r-1)^{p-1|-1}\Big]$$

$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[(s-(p-2)k_1-2m_1-1)^{p-1|-1} + 2\left|\begin{array}{l}(s-(p-2)k_1-m_1-m_2-1)^{p-1|-1}\\ (s-(p-2)k_1-m_1-m_3-1)^{p-1|-1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ (s-(p-2)k_1-m_1-m_r-1)^{p-1|-1}\\ -(s-(p-2)k_1-m_1-k_2-1)^{p-1|-1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ -(s-(p-2)k_1-m_1-k_r-1)^{p-1|-1}\end{array}\right.$$

$$+\frac{2.1}{1.2}\left|\begin{array}{l}(n-(p-2)k_1-2m_2-1)^{p-1|-1}\\ +2\left|\begin{array}{l}(n-(p-2)k_1-m_1-m_3-1)^{p-1|-1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ -(n-(p-2)k_1-m_2-k_r-1)^{p-1|-1}\end{array}\right.\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ +\frac{2.1}{1.2}(n-(p-2)k_1-2k_r-1)^{p-1|-1}\Big]\end{array}\right.$$

$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\Big[(s-(p-3)k_1-3m_1-1)^{p-1|-1} + 3\left|\begin{array}{l}(s-(p-3)k_1-2m_1-m_2-1)^{p-1|-1}\\ (s-(p-3)k_1-2m_1-m_3-1)^{p-1|-1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ -(s-(p-3)k_1-2m_1-k_r-1)^{p-1|-1}\end{array}\right.$$

$$+\frac{3.2}{1.2}\left|\begin{array}{l}(s-(p-3)k_1-m_1-2m_2-1)^{p-1|-1}\\ +2\left|\begin{array}{l}(s-(p-3)k_1-m_1-m_2-m_3-1)^{p-1|-1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ -(s-(p-3)k_1-m_1-m_2-k_r-1)^{p-1|-1}\end{array}\right.\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ (-1)^2(s-(p-3)k_1-m_1-2k_r-1)^{p-1|-1}\end{array}\right. \quad +\frac{3.2.1}{1.2.3}\left|\begin{array}{l}(s-(p-3)k_1-3m_2-1)^{p-1|-1}\\ 3\left|\begin{array}{l}(s-(p-3)k_1-2m_2-m_3-1)^{p-1|-1}\\ (s-(p-3)k_1-2m_2-m_4-1)^{p-1|-1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ -(s-(p-3)k_1-2m_2-k_r-1)^{p-1|-1}\end{array}\right.\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ (-1)^3(s-(p-3)k_1-3k_r-1)^{p-1|-1}\end{array}\right.$$

$$+\;\cdot\Big\}.$$

Diese Gleichung ist sehr allgemein, denn die Gröfsen $k_1, k_2, k_3, \ldots . k_r$, $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_r$ stehen unter einander in keinem Zusammenhange und können beliebig angenommen werden. Das Bildungsgesetz, welches der Formel 2. zum Grunde liegt, läfst sich leicht erkennen. Es hängt mit der Erhebung der unter 1. angegebenen Polynomien in die verschiedenen Potenzen zusammen. In den Facultäten der Glieder, welche mit der Facultät $\frac{p}{1}$ in 2. verbunden sind, kommen die Gröfsen $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_r$, $k_2, k_3, \ldots . k_r$ als Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zur ersten Classe neben der Gröfse $(p-1)k_1$ vor. In den Facultäten der Glieder, welche mit $\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}$ verbunden sind, kommen der Reihe nach die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zur zweiten Classe aus den nämlichen Elementen neben der Gröfse $(p-2)k_1$ vor. In den Facultäten der Glieder, welche mit $\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}$ verbunden sind, kommen der Reihe nach Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zur dritten Classe aus den angegebenen Elementen neben der Gröfse $(p-3)k_1$ vor u. s. w. Alle die so entstehenden Gruppen sind von s abzuziehen, und dann ist von diesem um die Einheit verminderten Grundfactor die $(p-1)$te Facultät zu nehmen. Jede so entstandene Facultät hat aufserdem eine Vorzahl. Dieselbe hängt von der Dimension der in ihr vorkommenden Elemente ab und giebt die Zahl der Versetzungen an, welche diese Elemente unter sich bilden können. Das Zeichen, welches jede Facultät insbesondere hat, hängt von der Zahl ab, in welcher die Elemente $k_2, k_3, k_4, \ldots . k_r$ in dem Grundfactor einer Facultät vorkommen, da diese Elemente nach 1. negativ betrachtet werden. In Zeichen stellt sich 2. so dar:

$$3. \quad A = \Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$
$$\times \left(\Sigma^{x=n} (-1)^{y_2+y_3+y_4+\ldots . y_r} \cdot \frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1} \cdot 1^{z_2|1} \ldots . 1^{z_1|1} \cdot 1^{y_2|1} \cdot 1^{y_3|1} \ldots . 1^{y_r|1}} \right.$$
$$\left. \times \frac{(s-(p-n)k_1 - z_1 m_1 - z_2 m_2 - z_3 m_3 \ldots . - z_r m_r - y_2 k_2 - y_3 k_3 - \ldots . - y_r k_r - 1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \right).$$

Hierin ist allmälig 0, 1, 2, ... p statt x zu setzen. Für jeden einzelnen Werth von x sind dann die durch das zweite Σ angezeigten Verbindungen zu machen. Die Gröfsen nach dem zweiten Σ hängen so unter sich zusammen:

$$x = n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots . z_r + y_2 + y_3 + \ldots . y_r.$$

Für n sind alle möglichen Summen der Versetzungen mit Wiederholungen

aus den Elementen 0, 1, 2, ... x zu derjenigen Classe zu bilden, welche entsteht, wenn die Gröfsen

$$y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots.\ y_r,\quad z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots.\ z_r$$

als Einheiten betrachtet werden. Die Gröfsen y_2, y_3, ... y_r beziehen sich auf k_2, k_3, k_4, ... k_r und die Gröfsen z_1, z_2, z_3, ... z_r auf m_1, m_2, m_3, ... m_r. Nach diesen Bemerkungen ist nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$4.\qquad w = \frac{1}{1^{p-1|1}m^p}\Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x\frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$

$$\times\Big(\Sigma^{x=n}(-1)^{y_2+y_3\ldots y_r}\frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots.1^{z_r|1}.1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots.1^{y_r|1}}$$

$$\times(s-(p-n)k_1-z_1m_1-z_2m_2\ldots.-z_rm_r-y_2k_2-y_3k_3\ldots.-y_rk_r-1)^{p-1|-1}\Big).$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die den Kugeln aufgeschriebenen Zahlen die Summe s oder eine niedrigere Summe betragen werden?

Wendet man das in 3. §. 11. befolgte Verfahren an, so ergiebt sich aus 2. und 3. dieses Paragraphen folgende Bestimmung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$5.\quad w = \frac{1}{1^{p|1}m^p}\Big[\Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x\frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$

$$\times\Big(\Sigma^{x=n}(-1)^{y_2+y_3+\ldots y_r}\frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots.1^{z_r|1}.1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots.1^{y_r|1}}$$

$$\times(s-(p-n)k_1-z_1m_1-z_2m_2-\ldots.z_rm_r-y_2k_2-y_3k_3-\ldots.-y_rk_r)^{p|-1}\Big)\Big].$$

Eben so leicht ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den genannten Bedingungen Kugeln erscheinen werden, deren aufgeschriebene Zahlen eine der Summen, welche zwischen q und s liegen, also eine der Summen $q+1$, $q+2$, ... s betragen, wenn wir das im vorigen Paragraph zu 6. angewendete Verfahren befolgen. Sie ist

$$6.\qquad w = \frac{1}{1^{p|1}m^p}\Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x\frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$

$$\times\Big(\Sigma^{x=n}(-1)^{y_2+y_3+\ldots y_r}\frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots.1^{z_r|1}\ldots.1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots.1^{y_r|1}}$$

$$\times(s-(p-n)k_1-z_1m_1-z_2m_2-\ldots.-z_rm_r-y_2k_2-y_3k_3-\ldots.-y_rk_r)^{p|-1}\Big)$$

$$-\frac{1}{1^{p|1}m^p}\Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x\frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}$$

$$\times\Big(\Sigma^{x=n}(-1)^{y_2+y_3+\ldots y_r}\frac{n^{n|-1}}{1^{z_1|1}.1^{z_2|1}\ldots.1^{z_r|1}.1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots.1^{y_r|1}}$$

$$\times(q-(p-n)k_1-z_1m_1-z_2m_2\ldots.-z_rm_r-y_2k_2-y_3k_3-\ldots.-y_rk_r)^{p|-1}\Big).$$

§. 13.

In einer Urne sind mit den Zahlen 1, 2, 3, ... $2m-1$ bezeichnete Kugeln enthalten. Von denen, welche die Zahlen 1 und $2m-1$ haben, ist nur je eine vorhanden; von denen, welche die Zahlen 2 und $2m-2$ haben, sind je zwei vorhanden; von denen, welche die Zahlen 3 und $2m-3$ haben, sind je drei vorhanden u. s. w.; von denen, welche die Zahl m haben, sind m vorhanden. Es wird p mal gezogen und bei jeder Ziehung eine Kugel herausgenommen, die nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summe der den gezogenen Kugeln aufgeschriebenen Zahlen s betragen wird?

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen kommt mit der Zahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe s in der $p$ten Classe aus m Elementenreihen gebildet werden, worin die Stellenzahlen der einzelnen Elemente mit den Zahlen übereinstimmen, die den in der Urne enthaltenen Kugeln aufgeschrieben sind. Benutzen wir die in §. 11. angegebene Methode, so haben wir die Vorzahl von x^s in der entwickelten Darstellung des nachstehenden Polynoms zu bestimmen:

$$P^p = (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots (m-1)x^{m-1} + mx^m + (m-1)^{m+1} + \dots$$
$$\dots 3x^{2m-3} + 2x^{2m-2} + x^{2m-1})^p.$$

Dies Polynom läfst sich auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{array}{rl} P^p = & [x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots x^{2m-3} + x^{2m-2} + x^{2m-1} \\ & \quad x^2 + x^3 + x^4 + \dots x^{2m-3} + x^{2m-2} \\ & \quad\quad + x^3 + x^4 + \dots x^{2m-3} \\ & \quad\quad\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & \quad\quad\quad x^{m-1} + x^m + x^{m+1} \\ & \quad\quad\quad\quad + x^m \;]^p \end{array}$$

$$= \left[\frac{x - x^{2m}}{1-x} + \frac{x^2 - x^{2m-1}}{1-x} + \frac{x^3 - x^{2m-3}}{1-x} + \dots \frac{x^{m-1} - x^{m+2}}{1-x} + \frac{x^m - x^{m+1}}{1-x}\right]^p$$

$$= \frac{1}{(1-x)^p}\left[\frac{x - x^{m+1}}{1-x} - \frac{x^{m+1} - x^{2m+1}}{1-x}\right]^p = \frac{x^p}{(1-x)^{2p}}(1 - 2x^m + x^{2m})^p;$$

was ferner in folgenden Ausdruck übergeht:

$$1.\quad P^p = \left(x^p + \frac{(2p)^{2p-1|-1}}{1^{2p-1|1}} x^{p+1} + \frac{(2p+1)^{2p-1|-1}}{1^{2p-1|1}} x^{p+2} + \frac{(2p+2)^{2p-1|-1}}{1^{2p-1|1}} x^{p+3} + \dots\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{p}{1}(2x^m - x^{2m}) + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(2x^m - x^{2m})^2 - \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}(2x^m - x^{2m})^3 + \dots\right).$$

Werden nun die nöthigen Entwicklungen gemacht, so ergiebt sich für die gesuchte Vorzahl von x^s folgender Ausdruck:

2. $$A = \frac{1}{1^{2p-1|1}}\{(s+p-1)^{2p-1|-1} - p[2(s+p-m-1)^{2p-1|-1} - (s+p-2m-1)^{2p-1|-1}]$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}[2^2(s+p-2m-1)^{2p-1|-1} - 2.2(s+p-3m-1)^{2p-1|-1} + (s+p-4m-1)^{2p-1|-1}]$$
$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[2^3(s+p-3m-1)^{2p-1|-1} - 3.2^2(s+p-4m-1)^{2p-1|-1} + \frac{3.2}{1.2}.2^1(s+p-5m-1)^{2p-1|-1} - \frac{3.2.1}{1.2.3}(s+p-6m-1)^{2p-1|-1}\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\}.$$

Werden die Glieder dieser Formel nach den unter sich gleichen Facultäten geordnet, so entsteht

3. $$A = \frac{1}{1^{2p-1|1}}\Big[(s+p-1)^{2p-1|-1} - 2p(s+p-m-1)^{2p-1|-1} + \left(\frac{2^2.p^{2|-1}}{1^{2|1}}+p\right)(s+p-2m-1)^{2p-1|-1}$$
$$-\left(2^3\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} + 2.2\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\right)(s+p-3m-1)^{2p-1|-1}$$
$$+\left(2^4\frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}} + \frac{3}{1}.2^2.\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} + \frac{2.1}{1.2}.\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\right)(s+p-4m-1)^{2p-1|-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\Big].$$

Werden die einer und derselben Facultät zugehörigen Ausdrücke zusammengezählt, so kommt man durch eine einfache Entwicklung zu folgender Darstellung für die gesuchte günstige Gruppen-Anzahl:

4. $$A = \frac{1}{1^{2p-1|1}}\left[(s+p-1)^{2p-1|-1} - \frac{2p}{1}(s+p-m-1)^{2p-1|-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m-1)^{2p-1|-1} - \frac{(2p)^{3}}{1^{3|1}}(s+p-3m-1)^{2p-1|-1} + \ldots\right].$$

Die Zahl aller in der Urne befindlichen Kugeln ist m^2. Demnach ist die Zahl aller möglichen Kugelgruppen m^{2p} und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

5. $$w = \frac{1}{1^{2p-1|1}m^{2p}}\left[(s+p-1)^{2p-1|-1} - \frac{2p}{1}(s+p-m-1)^{2p-1|-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m-1)^{2p-1|-1} - \ldots\right].$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sich auf den in p Ziehungen erschienenen Kugeln die Summe s oder eine niedrigere zeigen wird?

Wenden wir das in § 11. 3. gezeigte Verfahren an, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

6. $w = \frac{1}{1^{2p|1} m^{2p}} \Big[(s+p)^{2p|-1} - \frac{2p}{1}(s+p-m)^{2p|-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m)^{2p|-1} - \ldots \Big].$

Soll nun unter den nämlichen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs die Summe, welche durch die Zahlen der gezogenen Kugeln gebildet wird, zwischen q und s liegen oder unter einer der Summen $q+1$, $q+2$, ... s begriffen sei, so ergiebt sich auf die nämliche Weise:

7. $$w = \frac{1}{1^{2p|-1} m^{2p}} \Big[(s+p)^{2p|-1} - \frac{2p}{1}(s+p-m)^{2p|-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(s+p-2m)^{2p|-1} - \ldots \Big]$$
$$- \frac{1}{1^{2p|1} m^{2p}} \Big[(q+p)^{2p|-1} - \frac{2p}{1}(q+p-m)^{2p|-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(q+p-2m)^{2p|-1} - \ldots \Big]$$

oder, anders geordnet,

8. $$w = \frac{1}{1^{2p|1}.m^{2p}} \Big\{ (s+p)^{2p|-1} - (q+p)^{2p|-1}$$
$$- \frac{2p}{1}\Big[(s+p-m)^{2p|-1} - (q+p-m)^{2p|-1}\Big]$$
$$+ \frac{2p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[(s+p-2m)^{2p|-1} - (q+p-2m)^{2p|-1}\Big]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}.$$

§. 14.

In einer Urne befinden sich mit den Zahlen 1, 2, 3, ... $2m-1$ bezeichnete Kugeln. Von denen, welche die Zahlen 1 und $2m-1$ haben, ist nur je eine Kugel vorhanden; von denen, welche die Zahlen 2 und $2m-2$ haben, sind je drei vorhanden; von denen, welche die Zahlen 3 und $2m-3$ haben, sind je 6 vorhanden u. s. w.; von denen, welche die Zahl m haben, sind $\frac{m(m+1)}{1.2}$ vorhanden. Es wird p mal gezogen und bei jeder Ziehung eine Kugel aus der Urne genommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die den gezogenen Kugeln aufgeschriebenen Zahlen die Summe s geben werden?

Um die Zahl der günstigen Kugelgruppen zu finden, haben wir die Entwicklung des Polynoms

$$P^p = \Big[x + 3x^2 + 6x^3 + \ldots \frac{m(m+1)}{1.2} + \ldots + 6x^{2m-3} + 3x^{2m-2} + x^{2m-1}\Big]^p,$$

welches nach der oben angegebenen Methode in Frage kommt, zu machen und die Vorzahl des Gliedes x^s zu suchen. Wir zerlegen das Polynom

auf folgende Weise:

$$P^p =$$

$$\begin{array}{c}[x+2x^2+3x^3+\ldots(m-1)x^{m-1}+mx^m+(m-1)x^{m+1}+\ldots 3x^{2m-3}+2x^{2m-2}+x^{2m-1}]^p \\ x^2+2x^3+\ldots(m-2)x^{m-1}+(m-1)x^m+(m-2)x^{m+1}+\ldots 2x^{2m-3}+x^{2m-2} \\ +x^3+\ldots(m-3)x^{m-1}+(m-2)x^m+(m-3)x^{m+1}+\ldots x^{2m-3} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x^{m-1}+2x^m+x^{m+1} \\ +x^m\end{array}$$

Wird jede Horizontalreihe in diesem Ausdruck nach der zu Anfang des vorigen Paragraphs angeführten Weise behandelt, so erhalten wir Folgendes:

$$P^p = \left[\frac{x-2x^{m+1}+x^{2m+1}}{(1-x)^2}+\frac{x^2-2x^{m+1}+x^{2m}}{(1-x)^2}+\frac{x^3-2x^{m+1}+x^{2m-1}}{(1-x)^2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{x^{m-1}-2x^{m+1}+x^{m+3}}{(1-x)^2}+\frac{x^m-2x^{m+1}+x^{m+2}}{(1-x)^2}\right]^p.$$

Werden die Ausdrücke in dieser Formel gehörig geordnet, und wird der Vervollständigung wegen x^{m+1} zugezählt und abgezogen, so ergiebt sich

$$P^p = \frac{1}{(1-x)^{2p}}[x+x^2+x^3+\ldots x^{2m+1}-(2m+1)x^{m+1}]^p$$
$$= \frac{1}{(1-x)^{2p}}\left[\frac{x-x^{2m+2}}{1-x}-(2m+1)x^{m+1}\right],$$

und hieraus

$$1.\quad P^p = \frac{x^p}{(1-x)^{3p}}[1-x^{2m+1}-(2m+1)(x^m-x^{m+1})]^p.$$

Benutzen wir diesen Ausdruck zur Entwicklung, so findet sich

$$P^p = \left(x^p+\frac{(3p)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}x^{p+1}+\frac{(3p+1)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}x^{p+2}+\frac{(3p+2)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}x^{p+3}+\ldots\right)$$
$$\times\Big[1-p[x^{2m+1}+(2m+1)(x^m-x^{m+1})]$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}[x^{2m+1}+(2m+1)(x^m-x^{m+1})]^2$$
$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}[x^{2m+1}+(2m+1)(x^m-x^{m+1})]^3$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\Big].$$

Werden die angezeigten Verbindungen gemacht, so erhält man für die Zahl der günstigen Fälle folgenden Ausdruck der Vorzahl von x^s:

$$2.\quad A=\frac{1}{1^{3p-1|1}}\Big[(s+2p-1)^{3p-1|-1}-p\,\Big[(s+2p-2m-2)^{3p-1|-1}+(2m+1)\left|\begin{array}{l}+(s+2p-m-1)^{3p-1|-1}\\-(s+2p-m-2)^{3p-1|-1}\Big]\end{array}\right.$$

$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[(s+2p-4m-3)^{3p-1|-1}+2(2m+1)\left|\begin{array}{l}+(s+2p-3m-2)^{3p-1|-1}\\-(s+2p-3m-3)^{3p-1|-1}\end{array}\right.+(2m+1)^2\left|\begin{array}{l}+(s+2p-2m-1)^{3p-1|-1}\\-2(s+2p-2m-2)^{3p-1|-1}\\+(s+2p-2m-3)^{3p-1|-1}\Big]\end{array}\right.$$

$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\Big[(s+2p-6m-4)^{3p-1|-1}+3(2m+1)\left|\begin{array}{l}+(s+2p-5m-3)^{3p-1|-1}\\-(s+2p-5m-4)^{3p-1|-1}\end{array}\right.+\frac{3.2}{1.2}\left|\begin{array}{l}+(s+2p-4m-2)^{3p-1|-1}+\dots\\-2(s+2p-4m-3)^{3p-1|-1}\\+(s+2p-4m-4)^{3p-1|-1}\Big]\end{array}\right.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big].$$

Die zweiten, dritten Glieder u. s. w. dieser Horizontalreihen bilden, wie leicht zu sehen, die ersten, zweiten, dritten Unterschiede u. s. w. der Facultäten. Sie lassen sich nach der Gleichung

$$3.\quad \Delta^r\frac{x^{q|-h}}{1^{q|1}}=\frac{(x+rh)^{q|-h}}{1^{q|1}}-\frac{r}{1}\cdot\frac{(x+(x-1)h)^{q|-h}}{1^{q|1}}+\frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(x+(r-2)h)^{q|-h}}{1^{q|1}}-\dots$$
$$\dots(-)^r\frac{x^{q|-h}}{1^{q|1}}=\frac{q^{r|-1}}{1^{q|1}}x^{q-r|-h}.h^r=\frac{x^{q-r|-h}.h^r}{1^{q-r|1}}$$

umformen. Durch Benutzung dieser Gleichung geht die Formel 2. in folgende über:

$$4.\quad A=\frac{(s+2p-1)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}-p\left[\frac{(s+2p-2m-2)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}+(2m+1)\frac{(s+2p-m-2)^{3p-2|-1}}{1^{3p-2|1}}\right]$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(s+2p-4m-3)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}+2(2m+1)\frac{(s+2p-3m-3)^{3p-2|-1}}{1^{3p-2|1}}+(2m+1)^2\frac{(s+2p-2m-3)^{3p-3|-1}}{1^{3p-3|1}}\right]$$
$$-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\frac{(s+2p-6m-4)^{3p-1|-1}}{1^{3p-1|1}}+3(2m+1)\frac{(s+2p-5m-4)^{3p-2|-1}}{1^{3p-2|1}}+\frac{3.2}{1.2}(2m+1)^2\frac{(s+2p-4m-4)^{3p-3|-1}}{1^{3p-3|1}}+\frac{3.2.1}{1.2.3}(2m+1)^3\frac{(s+2p-3m-4)^{3p-4|-1}}{1^{3p-4|1}}\right]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

oder in Zeichen:

$$5. \quad A =$$

$$\Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{(s+2p-y(2m+1)-z(m+1)-1)^{3p-z-1|-1}}{1^{3p-z-1|1}}\right).$$

In diesem Ausdruck ist statt x allmälig 0, 1, 2, 3, ... p zu setzen, dann für jeden einzelnen Werth von x der Werth $y+z$ nach dem zweiten Σ beizubehalten; für $y+z$ sind die verschiedenen Summen zur zweiten Classe zu bilden und ihre Werthe nach Angabe der Gleichung einzuführen.

Um nun die fragliche Wahrscheinlichkeit zu erhalten, ist 4. oder 5. durch die Zahl aller möglichen Kugelgruppen zu messen. Die Zahl aller in der Urne enthaltenen Kugeln ist

$$A_1 = \frac{m^{3|1}}{1^{3|1}} + \frac{(m-1)^{3|1}}{1^{3|1}} = \frac{m(m-1)(2m+1)}{1.2.3}.$$

Diese Zahl ist in die $p$te Potenz zu erheben und dann ist 4. oder 5. damit zu messen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$6. \quad w = \frac{6^p}{m^p(m+1)^p(2m+1)^p}$$

$$\times \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{(s+2p-y(2m+1)-z(m+1)-1)^{3p-z-1|-1}}{1^{3p-z-1|1}}\right).$$

Die Bedingungen sind wie oben. Man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dafs in p Ziehungen Kugeln erscheinen werden, welche die Summe s oder eine niedrigere Summe bilden.

Wenden wir hier das in 3. §. 14. gebrauchte Verfahren an, so erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$7. \quad w = \frac{6^p}{m^p(m+1)^p(2m+1)^p}$$

$$\times \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{[s+2p-y(2m+1)-z(m+1)]^{3p-z|-1}}{1^{3p-z|1}}\right).$$

Soll nun die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs Kugeln erscheinen werden, deren Zahlen eine der Summen $q+1$, $q+2$, $q+3$, ... s bilden, so findet sich auf die nämliche Weise folgende Formel:

$$8. \quad w = \frac{6^p}{m^p(m+1)(2m+1)^p}$$

$$\times \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{[s+2p-y(2m+1)-z(m+1)]^{3p-z|-1}}{1^{3p-z|1}}\right)$$

$$- \frac{6^p}{m^p(m+1)^p(2m+1)^p}$$

$$\times \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}(2m+1)^z\frac{[q+2p-y(2m+1)-z(m+1)]^{3p-z|-1}}{1^{3p-z|1}}\right).$$

In 7. und 8. gelten die nämlichen Bedingungen, welche zu 5. angegeben wurden.

§. 18.

Wird die Zahl der Elemente unendlich grofs, so werden auch der Summen, welche durch sie erzeugt werden können, unendlich viele. Die einzelnen Elemente und Summen liegen dann einander unendlich nahe und werden, dem Ganzen gegenüber, unendlich klein. Es verschwinden also dann die endlichen Gröfsen in den Gleichungen 2. §. 14., 5. §. 16. und 6. §. 17. und die Facultäten gehen in Potenzen über. Dabei werden auch die Wahrscheinlichkeiten, eine bestimmte Summe unter unendlich vielen zu erhalten, unendlich klein und gehen in Differenziale über, die sich auf das Verhältnifs zwischen der fraglichen Summe und der Elementengrenze beziehen. Hiernach wird aus 2. §. 14., wenn $\frac{s}{m} = n$ ist,

$$1. \quad w = \frac{1}{1^{p-1|1}}\left[n^{p-1} - \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(n-2)^{p-1} - \ldots\right]\partial n.$$

Aus 5. §. 16. wird

$$2. \quad w = \frac{1}{1^{2p-1|1}}\left[n^{2p-1} - \frac{2p}{1}(n-1)^{2p-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}}(n-2)^{2p-1} - \ldots\right]\partial n.$$

Aus 6. §. 17. wird, da $\frac{m^p(m+1)^p(2m+1)^p}{6^p}$ in $\frac{m^{3p}}{3^p}$ übergeht,

$$3. \quad w = \Sigma_{x=0}^{x=p}(-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\Sigma^{x=y+z} \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}\cdot 1^{z|1}} \cdot \frac{(n-(y+z))^{3p-z}}{1^{3p-z-1|1}}\right)\partial n.$$

Schliefst man nun die unendliche Anzahl der erzeugenden Elemente in bestimmte Grenzen ein, so werden auch die durch sie erzeugten Summen in bestimmte Grenzen eingeschlossen werden, und dann kann man durch die Gleichungen 1. 2. 3. die Wahrscheinlichkeiten finden, dafs unter den beliebig vielen Summen nur solche in Frage kommen, die selbst wieder innerhalb willkürlich gewählter Grenzen liegen. Zu dem Ende ist es nur nöthig, die vorstehenden Gleichungen innerhalb bestimmter Grenzen zu integriren. Werden nun die Integrale zwischen r und n genommen, und wird nach geschehener Integration $n = \frac{s}{m}$ und $r = \frac{q}{m}$ gesetzt, so entsteht aus den Gleichungen 1. 2. 3.:

4. $$w = \int_r^n \frac{1}{1^{p-1|1}} \left[n^{p-1} - \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}(n-2)^{p-1} - \ldots \right] \partial n$$

$$= \frac{1}{1^{p|1}} \left[\left(\frac{s}{m}\right)^p - \left(\frac{q}{m}\right)^p - p \left[\left(\frac{s}{m} - 1\right)^p - \left(\frac{q}{m} - 1\right)^p \right] \right.$$
$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \left[\left(\frac{s}{m} - 2\right)^p - \left(\frac{q}{m} - 2\right)^p \right]$$
$$- \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} \left[\left(\frac{s}{m} - 3\right)^p - \left(\frac{q}{m} - 3\right)^p \right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

5. $$w = \int_r^n \frac{1}{1^{2p-1|1}} \left[n^{2p-1} - \frac{2p}{1}(n-1)^{2p-1} + \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \ldots \right] \partial n$$

$$= \frac{1}{1^{2p|1}} \left[\left(\frac{s}{m}\right)^{2p} - \left(\frac{q}{m}\right)^{2p} - 2p \left[\left(\frac{s}{m} - 1\right)^{2p} - \left(\frac{q}{m} - 1\right)^{2p} \right] \right.$$
$$+ \frac{(2p)^{2|-1}}{1^{2|1}} \left[\left(\frac{s}{m} - 2\right)^{2p} - \left(\frac{q}{m} - 2\right)^{2p} \right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

6. $$w = \int_r^n \Sigma_{x=0}^{x=p} (-1)^x \frac{p^{x|-1}}{1^{x|1}} \left(\Sigma^{x=y+z} \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1} \cdot 1^{z|1}} \cdot \frac{(n-(y+z))^{3p-x}}{1^{3p-z-1|1}} \right) \partial n$$

$$= \frac{3^p}{1^{3p|1}} \left\{ \left(\frac{s}{m}\right)^{3p} - p \left[\left(\frac{s}{m} - 2\right)^{3p} + 2.3p \left(\frac{s}{m} - 1\right)^{3p-1} \right] \right.$$
$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \left[\left(\frac{s}{m} - 4\right)^{3p} + 2.2.3p \left(\frac{s}{m} - 3\right)^{3p-1} + 2^2 (3p)^{2|-1} \left(\frac{s}{m} - 2\right)^{3p-2} \right]$$
$$\left. \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$
$$- \frac{3^p}{1^{3p|1}} \left\{ \left(\frac{q}{m}\right)^{3p} - p \left[\left(\frac{q}{m} - 2\right)^{3p} + 2.3p \left(\frac{q}{m} - 1\right)^{3p-1} \right] \right.$$
$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \left[\left(\frac{q}{m} - 4\right)^{3p} + 2.2.3p \left(\frac{q}{m} - 3\right)^{3p-1} + 2^2 (3p)^{2|-1} \left(\frac{q}{m} - 2\right)^{3p-2} \right]$$
$$\left. \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

Diese Gleichungen lassen sich benutzen, um die Sicherheit angestellter Beobachtungen und die Gröfse und Bedeutung der dabei vorgekommenen Fehler zu untersuchen. Die Aufgabe jeder Beobachtung, bei welcher verschiedene Resultate gewonnen werden können, ist, ein möglichst fehlerfreies Resultat zu erlangen. *Nur ein* Resultat kann das richtige, jedes andere wird mehr oder weniger fehlerhaft sein. Könnte man sagen, welches Resultat unter mehreren das richtige sei, oder könnte man die Gröfse des mit einem bestimmten Resultate verbundenen Fehlers genau angeben, so wäre aus jeder Beobachtung das richtige Resultat leicht abzuleiten, und es wäre überflüssig, Beobachtungen zu wiederholen, um die dabei vorkommenden Fehler so gut als möglich zu entfernen.

Kommen bei Beobachtungen positive und negative Fehler vor, so werden die einen auf der einen, die andern auf der andern Seite des richtigen Resultates liegen und sich bis zu einer bestimmten Grenze erstrecken. Nennt man diese Grenzen $+m$ und $-m$, so läfst sich fragen: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die bei den Beobachtungen vorgekommenen Fehler sich nicht über die Grenzen $+n$ und $-n$ entfernen werden.

Die Gleichungen 4. 5. und 6. gehen von verschiedenen Voraussetzungen aus. Die Gleichung 4. geht von der Voraussetzung aus, dafs alle Fehler, welche zwischen den äufsersten Fehlergrenzen $+m$ und $-m$ liegen, gleich möglich sind, oder dafs jede Beobachtung gleich leicht jedes beliebige Resultat treffen werde.

Die Gleichung 5. geht von der Ansicht aus, dafs das richtige Resultat öfter gewonnen werde, als ein fehlerhaftes; überhaupt am oftesten unter allen Resultaten; dafs sich die Möglichkeit, ein fehlerhaftes Resultat zu erhalten, in dem Maafse verringere, wie der Fehler zunimmt; und dafs die Möglichkeit, bis zu einer der äufsersten Fehlergrenzen zu irren, am kleinsten sei.

Die Gleichung 6. geht von der nämlichen Voraussetzung wie 5. aus, unterscheidet sich jedoch von dieser durch diejenige, dafs die Geschicklichkeit des Beobachters, die Fehler zu vermeiden, oder die richtigeren Resultate vor den unrichtigen zu gewinnen, im quadratischen Verhältnisse stehe.

Für die Gleichung 4. liegen die erzeugenden Elemente zwischen 0 und m. Um nun diese Gleichung für den Fall, wenn die äufsersten Fehlergrenzen $+m$ und $-m$ sind, brauchbar zu machen, hat man zu bemerken, dafs dies so viel ist, als wenn die erzeugenden Elemente zwischen 0 und $2m$ lägen. Die Summen liegen dann zwischen 0 und $2pm$, und der Werth des Mittelgliedes ist pm. Nennt man nun die Fehlergrenze, innerhalb welcher sich die Beobachtungen bewegen sollen, $+n$ und $-n$, so ist aus 4. die hiezu gehörige Wahrscheinlichkeit:

$$7.\quad w = \frac{1}{1^{p|1}}\Big\{\Big(\frac{pm+n}{2m}\Big)^p - \Big(\frac{pm-n}{2m}\Big)^p - p\Big[\Big(\frac{pm+n}{2m}-1\Big)^p - \Big(\frac{pm-n}{2m}-1\Big)^p\Big] + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\Big(\frac{pm+n}{2m}-2\Big)^p - \Big(\frac{pm-n}{2m}-2\Big)^p\Big] \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\Big\}.$$

Wenden wir die nämlichen Bemerkungen auf die Gleichungen 5. und 6.

an, so gehen sie in folgende über:

$$8.\quad w=\frac{1}{1^{2p|1}}\Big\{\Big(\frac{pm+n}{m}\Big)^{2p}-\Big(\frac{pm-n}{m}\Big)^{2p}-\frac{2p}{1}\Big[\Big(\frac{pm+n}{m}-1\Big)^{2p}-\Big(\frac{pm-n}{m}-1\Big)^{2p}\Big]$$
$$+\frac{2p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\Big(\frac{pm+n}{m}-2\Big)^{2p}-\Big(\frac{pm-n}{m}-2\Big)^{2p}\Big]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\},$$

$$9.\quad w=\frac{3^p}{1^{3p|1}}\Big\{\Big(\frac{pm+n}{m}\Big)^{3p}-p\Big[\Big(\frac{pm+n}{m}-2\Big)^{3p}+2.3p\Big(\frac{pm+n}{m}-1\Big)^{3p-1}\Big]$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\Big(\frac{pm+n}{m}-4\Big)^{3p}+2.2.3p\Big(\frac{pm+n}{m}-3\Big)^{3p-1}+2^2\frac{(3p)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big(\frac{pm+n}{m}-2\Big)^{3p-2}\Big]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}$$
$$-\frac{3^p}{1^{3p|1}}\Big\{\Big(\frac{pm-n}{m}\Big)^{3p}-p\Big[\Big(\frac{pm-n}{m}-2\Big)^{3p}+2.3p\Big(\frac{pm-n}{m}-1\Big)^{3p-1}\Big]$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\Big(\frac{pm-n}{m}-4\Big)^{3p}+2.2.3p\Big(\frac{pm-n}{m}-3\Big)^{3p-1}+2^2\frac{(3p)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big(\frac{pm-n}{m}-2\Big)^{3p-2}\Big]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}.$$

Der Werth von $pm+n$ und $pm-n$ mufs nach den besondern Bedingungen der Aufgabe für die vorstehenden Gleichungen vorerst ermittelt werden. Hiebei giebt p die Zahl der Beobachtungen an. Wir wenden nun die vorstehenden Gleichungen auf folgende Fälle an.

Drei Personen beobachten. Die äufserste Fehlergrenze liegt 4 Stufen rechts und links vom richtigen Resultat. Bei der ersten Person sind alle Fehler *gleich* möglich. Die Geschicklichkeit der zweiten Person, das richtige Resultat zu treffen, steht im arithmetischen Verhältnisse; die der dritten im quadratischen. Vier Beobachtungen werden von jeder gemacht. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der hiebei mögliche Fehler die erste Stufe nicht überschreiten werde?

Die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall ergiebt sich, wenn in 7. $p=4$, $m=4$, $pm+n=20$, $pm-n=12$ gesetzt wird. Sie ist

$$10.\quad w=\frac{1}{1^{4|1}8^4}[20^4-12^4-4(12^4-2^4)+6.2^4]=0{,}598958\ldots.$$

Für die im zweiten und dritten Fall ergiebt sich, bei den gleichen Werthen,

$$11.\quad w=\frac{3^4}{1^{8|1}}[5^8-3^8-8(4^8-2^8)+\ldots.]=0{,}774781\ldots.$$

$$12.\quad w=\frac{3^4}{1^{12|1}}[5^{12}-4(3^{12}+2.12.4^{11})+\ldots]-\frac{3^4}{1^{12|1}}[3^{12}-4(1+2.12.2^{11})+\ldots]$$
$$=0{,}885688\ldots.$$

Die Betrachtung der hierher gehörigen speciellen Fälle läfst sich weiter verfolgen. Sie zeigt, welchen Werth die gröfsere Geschicklichkeit und Gewandtheit eines Beobachters vor der geringeren voraus hat, wenn beide die gleiche Anzahl von Beobachtungen machen.

Die Vergleichung der Gleichungen 7. und 8. führt auf eine interessante Folgerung. Wird nämlich $2p$ statt p in 7. gesetzt, wobei n in $2n$ übergeht, so ergiebt sich leicht, dafs hiedurch die Gleichung 7. mit 8. zusammenfällt. Demnach führt der Calcul auf folgende Bemerkung.

10. Die doppelte Zahl der Beobachtungen führt bei einem ungeübten Beobachter algebraisch zu dem gleich fehlerfreien Resultate, wie die einfache Zahl bei einem Beobachter, dessen Geschicklichkeit und Uebung, das richtige Resultat bei gleicher Fehlergrenze zu treffen, in einfachem arithmetischem Verhältnisse wächst. Der Calcul behauptet hiernach, dafs Fleifs und Ausdauer den Leistungen der Geschicklichkeit und Gewandtheit gleichkommen können.

Untersucht man die Gleichungen 8. und 9. weiter, so lassen sich aus ihnen noch andere nicht uninteressante Sätze ableiten. Dahin gehört:

11. Wird die Zahl der Beobachtungen gesteigert, so wird nicht nur die Wahrscheinlichkeit, ein richtiges Resultat zu erlangen, gröfser, sondern auch diejenige, dafs sich die Fehlergrenze in engere Schranken ziehen werde.

12. Je näher ein Fehler dem richtigen Resultate liegt, desto gröfser wird die Wahrscheinlichkeit, ihn zu begehen; je entfernter er vom richtigen Resultate liegt, oder je bedeutender und gröfserer ist, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit, ihn zu begehen. Dies Wachsen und Abnehmen steht aber nicht im einfachen arithmetischen Verhältnisse bei 8., und nicht im quadratischen bei 9.

13. Bei einer und derselben Anzahl von Beobachtungen ist die Güte der Resultate um so gröfser, je enger die Fehlergrenze gezogen wird; die Wahrscheinlichkeit jedoch, eine engere Fehlergrenze unter dieser Bedingung zu erhalten, verkleinert sich. U. s. w.

Wir verweisen jedoch, um nicht Gesagtes zu wiederholen, auf die oben angeführte Schrift „Die Versetzungen zu bestimmten Summen, §. 15. u. ff.", worin hier einschlagende Untersuchungen aufgenommen sind.

Die Neigungen der Ebenen der Planetenbahnen haben bekanntlich zusammen am Anfange des Jahrs 1801 $81^{\circ},93$ sechszigtheiliger Eintheilung

(= 91,03° hunderttheiliger) betragen, wenn man von der Ebene der Erdbahn als Basis ausgeht. Dabei entfernen sich die Bahnen der Ceres, Juno und Pallas um 10°, 13°, 34°. Zwei Bahnen, die des Merkurs und der Vesta, entfernen sich um etwa 7°, die der übrigen höchstens um 3°. Nimmt man nun an, dafs bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen eine Ursache in bestimmter Richtung am stärksten, und auf beiden Seiten in quadratischem Verhältnisse abnehmend, etwa wie die Schwungkraft, so gewirkt habe, dafs in einer Entfernung von 10° ihre Grenze zu setzen sei, und fragt: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs unter dieser Voraussetzung die Neigungen von 10 Planetenbahnen in die Grenzen von 5° auf beiden Seiten von der bezeichneten Richtung eingeengt geblieben wären, oder dafs die Breite des Thierkreises nicht 10° überschritten hätte, so erhalten wir aus 9., wenn $p=10$, $pm+n=150$, $pm-n=50$, $m=10$ gesetzt wird,

$$w = \frac{3^{10}}{1^{30|1}}\left\{15^{30}-10[13^{39}-60.14^{29}]+\frac{10.9}{1.2}[11^{30}+4.30.12^{29}+....]-....\right\}$$

$$-\frac{3^{10}}{1^{30|1}}\left\{5^{30}-10[3^{30}-60.\,4^{29}]\right.$$

$$\left.+\frac{10.9}{1.2}[1^{30}+4.30.2^{29}+4.30.29.3^{28}]-....\right\}$$

$$= 0{,}999\,999\,992\,300\,1......$$

Der Werth dieser Wahrscheinlichkeit ist sehr grofs und liegt der Gewifsheit sehr nahe, und man kann daher mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dafs die Breite des Thierkreises 10° unter der obigen Voraussetzung nicht überschritten hätte. Stellen wir aber dieser Voraussetzung die Neigungen der Bahnen des Merkurs, der Vesta, Juno, Ceres und Pallas gegenüber, so übersteigen sie diese Grenze bedeutend und streiten gegen diese Annahme. Da sich aber mit ziemlicher Sicherheit nachweisen läfst (s. m. angef. Schrift §. 12. p. 69 u. ff. und *Laplace Théor. anal. d. prob. p. 257*), dafs bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen der Zufall nicht vorgeherrscht habe, da sich die Einwirkung des Zufalls mit der Stetigkeit der Naturgesetze nicht gut vereinigt, und die Annahme *einer* wirkenden Ursache am angemessensten scheint, so läfst sich mit ziemlicher Sicherheit folgern, dafs bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen *nur eine* Ursache gewirkt habe, dafs diese aber durch Zufälligkeiten, etwa durch die excentrische Lage des Schwerpunctes, durch Zerspringen der Massen u. s. w. gestört und so die Divergenz der Planetenbahnen hervorgebracht worden sei.

In dem vorliegenden speciellen Falle wurde der kürzern Berechnung wegen die Zahl der Planeten zu 10 statt zu 11 angenommen. Es ist einleuchtend, dafs der Werth der Wahrscheinlichkeit noch gröfser sein würde, wenn 11 Planeten in den Calcul aufgenommen worden wären.

Man erkennt leicht den Zusammenhang, in welchem die Probleme in §. 14 bis 18. stehen. Sie gehören einer gröfsern Reihe von Problemen an, die in meiner oben angeführten Schrift zusammengestellt und auf combinatorischem, so wie auf analytischem Wege behandelt wurden, und die wir deswegen hier nicht aufnehmen, sondern uns ihretwegen auf diese Schrift beziehen.

Die Gleichung 2. §. 14. ist schon von *Moivre* (in *Miscellan. analyt.* nach *Lacroix* Wahrscheinl. Rechnung §. 53.) und von *Laplace* (*Théor. anal. d. prob. No. 13. p. 25* u. f.) mitgetheilt worden. Unter specieller Form findet sich in dem angeführten Werke p. 257 die Gleichung 7. dieses Paragraphs.

(Die Fortsetzung folgt.)

Druckfehler.

S. 319 Z. 13 v. o., S. 320 Z. 16 v. o. und S. 321 Z. 2 v. u. statt §. 11. lies §. 14.
S. 320 Z. 1 v. o. statt §. 13. lies §. 16.
S. 322 Z. 14 v. o. statt §. 14. lies §. 17.

22.

Ueber die Deduction der Methode der kleinsten Quadrate aus Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Hrn. Dr. *Reuschle*, Prof. am Gymnasium zu Stuttgart.)

Man unterscheidet mit Recht in den höhern Zweigen der Analysis und ihrer Anwendungen zwischen der *Metaphysik*, d. h. der Festsetzung und analytischen Darstellung der Grundbegriffe, und zwischen dem *Algorithmus*, d. h. der Entwicklung der Formelnsysteme und Rechnungskunstgriffe, um in jedem Falle der Anwendung auf die kürzeste und netteste Art zum Ziel zu gelangen. Das letztere kann einen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht haben und es können damit die schönsten Resultate ermittelt sein, während der erste Punct noch Manches zu wünschen übrig läfst; sei es, dafs noch eine wirkliche Unklarheit daselbst zurückblieb, oder dafs es wenigstens noch an der Vermittlung mit den unmittelbarsten, elementaren Begriffen auf demselben Gebiete fehlt. Hieher scheint noch immer die Methode der kleinsten Quadrate zu gehören; vor allem, *erstlich*, der analytische Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dafs dem beobachteten Werth einer Gröfse ein zwischen gewissen Gränzen enthaltener Fehler anhafte. Alsdann gehören aber auch noch folgende Puncte zur Metaphysik dieses Gegenstandes, nemlich *zweitens*, die allgemeinen Eigenschaften der eingeführten Function der Fehlergröfse; *drittens*, das Princip für die Auflösung der überbestimmten Aufgabe, eine gewisse Anzahl von Elementen aus einer *gröfsern* Anzahl beobachteter Werthe von Gröfsen herzuleiten, welche bekannte Functionen jener Elemente sind; *viertens*, die plausibelste Bestimmung der vor der Hand unbestimmt gebliebenen Function der Fehlergröfse, zum Behuf wirklicher Berechnungen; und endlich *fünftens*, die Bestimmung der in dieser Function enthaltenen Constante zum Behuf der Schätzung der Präcision, welche den nach No. 3. und 4. ermittelten Werthen wirklich zukommt; was auf die Theorie des mittleren Fehlers hinausläuft. Der erste von den genannten Puncten ist es hauptsächlich, worin die meisten Darstellungen an einer Unklarheit leiden, welche, beziehungsweise, bis zur Aufstellung von geradezu sich wider-

sprechenden Behauptungen gehet und ihren Grund in der Verwechslung zweier Begriffe hat, der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers, als eines einzelnen Ereignisses, mit dem Verhältnifs, welches zwischen diesen Wahrscheinlichkeiten verschiedener Fehler statt findet, oder der Verwechselung der *relativen Wahrscheinlichkeit* (Häufigkeit, Möglichkeit, Leichtigkeit), die einem Fehler, verglichen mit andern, zukommt, mit der *absoluten Wahrscheinlichkeit* desselben an sich, d. h., dafs er einem vorliegenden Beobachtungsresultat wirklich anhafte. Diese zweierlei Wahrscheinlichkeiten sind denn auch heterogene Gröfsen; die letztere ist, als die eines einzelnen Ereignisses unter unendlich vielen möglichen, schlechthin Null für jede Gröfse des Fehlers, und wird erst zu einer endlichen Gröfse, wenn anstatt des bestimmten Fehlers ein unbestimmter, zwischen gewissen Gränzen enthaltener Fehler betrachtet wird; die erstere dagegen ist, wofern der Fehler gewisse Gränzen nicht überschreitet, eine endliche Gröfse; wie denn überhaupt das Verhältnifs zweier verschwindenden Gröfsen keineswegs Null sein *mufs;* sie ist eine Gröfse, deren Werth der Erfahrung gemäfs um so gröfser ist, je kleiner der Fehler u. s. w. und die überhaupt auf eine gesetzmäfsige Weise (wie angenommen werden darf, wenn sie auch direct sich nimmermehr ermitteln läfst) mit dem Werthe des Fehlers sich ändert und daher analytisch als eine Function des Fehlers zu betrachten und geometrisch durch Linien-Ordinaten einer Curve für die Fehlerwerthe als Abscissen, darzustellen ist, während alsdann, wie sich zeigen läfst, die erstere Wahrscheinlichkeit bei der eben eingeführten Erweiterung durch ein Integral zwischen den betreffenden Gränzen ausgedrückt wird; was bei der geometrischen Darstellung Flächenräume giebt, und eben daher auf Null sich reducirt, wenn die Gränzen coïncidiren oder aus dem unbestimmten Fehler ein bestimmter wird.

Unter den mir bekannten Darstellungen ist allein die des berühmten Urhebers dieser Theorie frei von dem Vorwurf der gedachten Begriffsverwirrung *). Wenn nämlich allerdings in seiner ersten Darstellung (Theoria motus etc. pag. 109) jene wesentliche Unterscheidung noch nicht deutlich hervortritt, sondern in einen Doppelsinn des Wortes *probabilitas* sich versteckt, so ist sie völlig enthalten in der zweiten, in folgender Stelle der *Theoria combinationis etc.* pag. 4: „Designando *facilitatem relativam* „erroris totalis x, in determinato observationum genere, per characteristicam

*) Vergl. die Note zu dieser Abhandlung am Schlufs.

„φx, hoc, propter errorum continuitatem, ita intelligendum erit, *probabilita-*
„*tem* erroris inter limites infinite proximos x et $x+dx$ esse $= \varphi x . dx$."
Freilich hat hier *Gaufs* nicht nur dem Leser es überlassen, die gehörigen Zwischenbegriffe zwischen φx und $\varphi x . dx$ einzuschalten, sondern demselben gewissermafsen den Standpunct dazu verschoben, indem er, dem Wort-Ausdruck gemäfs, in eine Art Doppel-Erklärung eine Definition und ein Theorem verschmilzt. Ebendeshalb aber konnte, trotz jener Stelle, selbst in Schriften, welche von derselben ausgehen, wie z. B. die Darstellung in dem 1831 erschienenen Supplementband zu *Baumgärtner's* Naturlehre, die Verwirrung sich wieder einstellen. Hier soll nämlich die von *Gaufs* gelassene Lücke dadurch ausgefüllt werden, dafs die Leichtigkeit, einen Fehler von der Gröfse x zu begehen, schlechtweg wieder beseitigt und die Wahrscheinlichkeit, ihn begangen zu haben, dafür substituirt wird. Weil nämlich jene eine Function von der Gröfse des Fehlers und diese um so gröfser sei, je leichter er zu begehen war, so sei auch diese Wahrscheinlichkeit eine Function φx des Fehlers x, mithin die eines zwischen x und $x+dx$ liegenden Fehlers $\varphi x . dx$. Andere Darstellungen ignoriren die von *Gaufs* angegebene Bedeutung der Function φx, wie es scheint, ganz, und gerathen, indem sie darunter mehr oder weniger direct die Wahrscheinlichkeit des Fehlers in einem bestimmten Beobachtungsresultat verstehen, in den Widerspruch, dafs φx sowohl eine endliche Gröfse, als auch immer Null oder unendlich klein sein soll. Sei es, dafs dieser Widerspruch wirklich der Darstellung fühlbar werde, oder nicht: immer wird der Uebergang von φx zu $\varphi x . dx$, oder zum Integral, der unter jener Voraussetzung gar nicht möglich ist, entweder auf eine unklare Weise so gut als geradezu postulirt, oder durch entschieden irrige Begriffe nur scheinbar bewiesen. So dürfte es etwas unpassend sein, wenn *Grunert* (im mathematischen Wörterbuch) die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler einer Beobachtung zwischen δ und $\delta+i$ falle (wo i ein kleines Intervall sein soll, dessen Puncten, indem man sich den Gegenstand geometrisch vorstellt, gleiche Wahrscheinlichkeit zukomme, dafs der Fehler in einen von ihnen falle), aus den beiden Wahrscheinlichkeiten zusammensetzt: einmal der, dafs der Fehler δ sei, d. h. $\varphi\delta$, dann der, dafs er in das Intervall i falle, welches i Puncte enthalte, und dann nach dem Princip der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit daraus schliefst, sie sei $i\varphi\delta$. Was endlich die sonst so schätzbare Abhandlung von *Encke* im astronomischen Jahrbuch betrifft, so scheint auch hier leider

jene Verwechslung Statt zu finden, und ich erlaube mir darüber, bei aller Werthschätzung der Arbeit und bei aller Hochachtung vor ihrem Verfasser, folgende Bemerkungen; eben wegen des grofsen Werthes, der ihr zukommt und wegen dessen sie, so wie man über die sofort zu bezeichnenden Ungenauigkeiten in der Metaphysik im Reinen ist, zum Studium der Methode der kleinsten Quadrate nicht genug empfohlen werden kann.

Nachdem *Gaufs* in seinen theoretischen Untersuchungen hauptsächlich den Zweck verfolgt hatte, die Methode, auf den Grund weniger, kurz und einfach hingestellter Begriffe, als die plausibelste *a priori* nachzuweisen, ohne sich dabei auf die Vermittelung mit elementaren Begriffen einzulassen: nachdem er selbst, so wie *Encke* und Andere, besonders aber *Bessel,* sie practisch mit so vielem Erfolg angewandt und hiermit ihre Plausibilität *a posteriori* erhärtet hatte, wollte *Encke* in der genannten Abhandlung einen vollständigen Lehrbegriff des Gegenstandes geben und dabei die zuvor bezeichnete Lücke, die *Gaufs* gelassen, ausfüllen; wie es die Natur der Aufgabe mit sich brachte. Letzteres dürfte nun in soweit nicht gelungen sein, als die mehrfach erwähnte Verwechslung hier einen Einflufs hat, und es zeigt sich leicht, dafs auf dieser Alles beruht, was auszusetzen sein dürfte. Zwar braucht *Encke* manche Ausdrücke, namentlich „gesetzmäfsiges Verhältnifs der Häufigkeit eines Fehlers," welche an die rechte Auffassung der Function φx erinnern: allein wenn dieselbe als die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x hingestellt und dahin erklärt wird, „dafs unter n beobachteten Fehlern $n\varphi x$ von der Gröfse x sein werden, und zwar um so näher, je gröfser n' sei," so liegt darin die nicht passende Auffassung, mit allen ihren Folgen. Denn, *erstens,* dafs diese Anzahl vielmehr $ni\varphi\alpha$, wo i ein Unendlichkleines, wäre, was sich freilich, wenn man der Strenge gemäfs $n=\infty$ und $i=0$ setzt, auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ reducirt (vergl. §. 3.), geht schon aus der Analogie mit dem später aufgestellten und durch ein Beispiel aus den *Fundamentis Astronomiae etc.* empirisch erläuterten Satze hervor, dafs die Anzahl der in n Beobachtungen vorkommenden Fehler zwischen x und x', für ein grofses n sehr nahe durch $n\int_x^{x'} dx.\varphi x$ ausgedrückt werde, indem dem Integral nicht φx, sondern $\varphi x.dx$ oder $i\varphi x$ entspricht. *Zweitens* führt jene Erklärung sofort zu der unhaltbaren Gleichung $\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi x = 1$, aus welcher dann die der vorhergehenden Discussion der Function φx geradezu

widersprechende Folgerung gezogen wird: für ein bestimmtes x müsse die Function φx ein Unendlichkleines sein. *Drittens* wird das Differential $\varphi x . dx$ durch die Bemerkung untergeschoben, man drücke diese Bedingung, φx für ein bestimmtes x unendlich klein, nach dem analytischen Sprachgebrauch bequemer dadurch aus, dafs man nicht die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers allein betrachte, sondern die der Fehler innerhalb der unendlich nahen Gränzen x und $x+dx$ zusammen; und innerhalb derselben werde der Werth von φx als constant anzusehen und demnach die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zwischen x und $x+dx$ durch $\varphi x . dx$ auszudrücken sein.

Nach diesen historisch-kritischen Bemerkungen ist nun mein Hauptzweck, den ersten der Puncte, die eben als zur Metaphysik unseres Gegenstandes gehörig bezeichnet wurden, durch eine fafsliche und strenge Deduction ins Klare zu setzen. Dabei mufs ich mich aber, theils des Zusammenhanges wegen, theils weil hin und wieder Einiges nachzutragen ist, besonders in der Theorie des mittleren Fehlers, auch auf die übrigen einlassen und eine Bemerkung über die überall in Anwendung kommenden Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausschicken.

§. 1.

Die Sätze von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.

Versteht man überhaupt unter zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit die eines Ereignisses, welches von mehreren andern abhängt, deren Wahrscheinlichkeiten für sich betrachtet w_1, w_2 u. s. w. und die von einander unabhängig sind, so sind es zwei Fälle, die in Betracht kommen: *erstlich*, die Wahrscheinlichkeit, dafs irgend eines dieser Ereignisse eintreffe, die des Entweder-Oder, welche W heifse, und *zweitens*, diejenige, dafs diese Ereignisse zusammentreffen, die des Sowohl-Als-auch, die mit W' bezeichnet werden soll; und man beweiset, wenn man es mit discreten Zahlen von Fällen zu thun hat, wo alle Gröfsen w die Form $\frac{n}{N}$ haben, leicht, dafs

$$W = w_1 + w_2 + \dots . w_m \quad \text{und} \quad W' = w_1 . w_2 \dots . w_m$$

ist, wenn m die Anzahl der partiellen Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Es fragt sich nun, ob diese Formeln allgemein sind und ob sie ohne Weiteres auch dann gebraucht werden dürfen, wenn es sich um stetige Gröfsenfolgen handelt; wie in unserem Falle, wo also die Gröfsen w nicht mehr die Form

$\frac{n}{N}$ haben. Viele Schriftsteller dehnen jene Formeln ohne Weiteres auf solche Fälle aus, und es dürfte sich in der That nichts Entscheidendes dagegen sagen lassen; denn einerseits kann man den zweiten Fall annähernd immer auf den ersten zurückführen, indem man sehr grofse Anzahlen nimmt und etwa so schliefst: Da unter einer sehr grofsen Anzahl N von Beobachtungen n einen Fehler zwischen gewissen Gränzen haben werden (auch in diesem oder jenem empirischen Beispiel wirklich haben), so kann man annähernd die Wahrscheinlichkeit desselben durch $\frac{n}{N}$ vorstellen, und die Art, wie diese Näherungswerthe zu den Gröfsen W, W' zu verbinden seien, d. h. nach den obigen Formeln, müsse auch noch gelten, wenn man die exacten Ausdrücke der partiellen Wahrscheinlichkeiten an ihre Stelle setze; andrerseits, wenn man allgemein davon ausgeht, die Gröfsen W und W' als Functionen der Gröfsen w zu betrachten, so müssen diese Functionen so beschaffen sein, dafs sie, so wie sich bestimmte Mengen von Fällen unterscheiden lassen, auf obige Formen sich reduciren; was wohl schwerlich anders möglich ist, als wenn dies ihre allgemeinen Formen sind. *Encke* fand für gut, den zweiten Satz für das Zusammentreffen mehrerer Fehler besonders zu beweisen; allein einmal geschieht es nur beispielsweise, alsdann aber nach dem oben erwähnten Annäherungsprincip, und dann auf den Grund der als unhaltbar nachgewiesenen Vorstellung, dafs $n\varphi x$ die Anzahl der Fehler x in n Beobachtungen sei. Gegenüber von alle dem läfst sich aber in der That auch ein allgemeiner Beweis der beiden Formeln geben, welcher von der Art, wie die partiellen Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt sind, ganz unabhängig ist, während man, davon ausgehend, dafs im Allgemeinen

$$W = F(w_1, w_2, \ldots .), \qquad W' = F'(w_1, w_2, \ldots .)$$

zu setzen sei, nach innern Bedingungen die Form dieser Functionen zu bestimmen sucht.

1. Es liegt nemlich in der Natur der Sache, dafs die Functionen F, F' nach der Gröfse w symmetrisch sein müssen.

2. Wenn eine der Gröfsen w Null wird, so verschwindet W', während sie aus der Function F geradezu herausfällt, so dafs W dieselbe Function der übrigen w bleibt. Verschwinden daher alle bis auf ein w, so ist einerseits $W = Fw$; andrerseits mufs dann $W = w$ sein, mithin $Fw = w$: eine Bedingung, der aber nicht nur die Summe aller Gröfsen w, sondern auch z. B. $W = \sqrt{(w_1^2 + w_2^2 + \ldots .)}$ Genüge leisten würde.

3. Dieselbe Eigenschaft bietet die Function F' für den Fall dar, dafs eine der Gröfsen w auf die Einheit sich reducirt, d. h. dafs das durch sie vertretene Ereignifs *gewifs* ist. Diese Gröfse fällt einfach heraus, und W' bleibt dieselbe Function der übrigen. Wären daher alle w der Einheit gleich, bis auf ein w, so ist einerseits $W' = F'w$; andrerseits mufs dann $W' = w$ sein, mithin $F'w = w$: eine Bedingung, der ebenfalls genügt wird, wenn F' überhaupt zwei entgegengesetzte Operationen bezeichnet.

4. Durch alle bisher gedachten Bedingungen ist nun die nähere Form der Functionen F, F' dahin indicirt, dafs F eine Function der Summe irgend welcher, aber einerlei, Functionen der einzelnen Gröfsen w sei, F' dagegen eine Function des Products solcher Einzelfunctionen; d. h.

$$W = f(\varphi w_1 + \varphi w_2 + \ldots.), \qquad W' = f'(\psi w_1 . \psi w_2 \times \ldots.),$$

so dafs

$$f(\varphi w) = w \quad \text{und} \quad f'(\psi w) = w$$

ist; und ferner

$$\varphi 0 = 0, \quad \psi 0 = 0 \quad \text{und} \quad \psi 1 = 1.$$

5. Da es ferner in beiden Fällen einerlei sein mufs, nicht nur in welcher Ordnung man die Gröfsen w combinirt (No. 1.), sondern auch, in welchen Gruppen man sie zu neuen partiellen Wahrscheinlichkeiten zusammensetzt, um dann diese auf dieselbe Art zur totalen zusammenzusetzen, so müssen die Functionen F, F' auch die Eigenschaft haben, dafs

$$F(w_1, \ldots. w_m) = F\{F(w_1, \ldots. w_\nu), F(w_{\nu+1}, \ldots. w_\mu), F(w_{\mu+1}, \ldots.), \ldots.\}$$
$$F\{F(F(w_1, \ldots.), F(w_{\nu'}, \ldots.), \ldots.), F(w_{\nu+1}, \ldots.), \ldots.\}$$

ist (wo z. B. $m = \nu + \mu + \ldots.$ und dann wieder $\nu = \nu' + \nu'' + \ldots.$ u. s. w.), u. s. w. in allen erdenklichen Combinationen. Desgleichen bei F'. Dies ist aber die ausschliefsliche Eigenschaft der Summen und Producte, sei es der Gröfsen w selbst, oder, um in gehöriger Allgemeinheit zu verfahren, irgend welcher Einzelfunctionen derselben, die aber wegen No. 1. für alle einerlei Form haben und wegen No. 2. mit ihnen verschwinden müssen. Da überdies die *Summe* der Gröfse W, das *Product* der Gröfse W' entspricht (No. 2.), so führt diese Betrachtung zu

$$W = \varphi w_1 + \varphi w_2 + \ldots., \qquad W' = \psi w_1 + \psi w_2 + \ldots.$$

6. Verbindet man dieses Resultat mit dem von No. 4., so erhellet, dafs

$$f(\varphi w) = \varphi w \quad \text{und folglich} \quad \varphi w = w,$$

desgleichen

$$f(\psi w) = \psi w, \quad \text{mithin} \quad \psi w = w$$

sein mufs, und dafs also allgemein

$$W = w_1 + \ldots + w_m, \qquad W' = w_1 \times \ldots \times w_m \text{ ist.}$$

Die in No. 5. gedachte Eigenschaft der Functionen F, F' war jedenfalls zu erwähnen, als eine wesentliche, die ein Moment zur Bestimmung derselben liefern kann, und der darauf gegründete Beweis hat den Vorzug, für die beiden zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten ganz gleichartig zu sein. Allein man kann auch Umgang davon nehmen und den zweiten Satz für W' als eine Folge des ersten für W nachweisen, diesen aber von dem in No. 4. gewonnenen Resultat aus durch folgende, bisher nicht verwendete Eigenschaft dieser Gröfse vollends demonstriren.

7. Wenn alle Gröfsen w einander gleich sind, so ist offenbar $W = nw$, indem nach dem Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens irgend eines von n gleich wahrscheinlichen Ereignissen das $n$fache von derjenigen eines bestimmten einzelnen derselben ist. Für diesen Fall folgt aber andrerseits aus No. 4.

$$W = f(n\varphi w),$$

und mithin, wenn man die eben daselbst aufgestellte Gleichung

$$w = f(\varphi w)$$

mit der Bedingung $W = nw$ verbindet,

$$f(n\varphi w) = nf(\varphi w).$$

Diese Functionalgleichung aber giebt $f(\varphi w) = \varphi w = w$; womit

$$W = w_1 + \ldots + w_m$$

erwiesen ist.

8. Nimmt man jetzt, um mittelst dieses Resultats das andere zu beweisen, zunächst blofs zwei partielle Wahrscheinlichkeiten w, w', und setzt demgemäfs

$$W' = F'(w, w'),$$

also auch, wenn w zu $w + \Delta w$ wird,

$$W' + \Delta W' = F'(w + \Delta w, w'),$$

so drückt Letzteres die Wahrscheinlichkeit aus, dafs das Ereignifs w' mit dem Ereignifs $w + \Delta w$, folglich entweder mit w oder mit Δw coexistire, sofern man eben nach dem ersten Satze die Summe $w + \Delta w$ als die Entweder-Oder-Wahrscheinlichkeit jener Ereignisse betrachten kann, wovon das eine die Wahrscheinlichkeit w, das andere die Δw hätte. Nun sind aber die vorhin genannten Wahrscheinlichkeiten

$$F'(w, w') \quad \text{und} \quad F'(\Delta w, w'),$$

also hat man wiederum, nach dem ersten Satz:

$$F'(w+\Delta w,\ w') = F'(w,\ w')+F'(\Delta w,\ w'),$$

woraus zufolge des allgemeinen Satzes von der Proportionalität, den ich im zweiten Hefte des 24sten Bandes dieses Journals bewiesen habe, folgt, dafs W' der Gröfse w proportional, also

$$W' = wfw'$$

ist; ferner aber, durch Wiederholung desselben Schlusses für w', oder schon daraus, dafs W nach w und w' symmetrisch sein soll,

$$W' = Cww';$$

endlich, da $W=1$, wenn $w=w'=1$, was $C=1$ giebt:

$$W' = ww';$$

und daher auch bei beliebig vielen partiellen Wahrscheinlichkeiten:

$$W = w_1 w_2 \times \ldots . w_m.$$

§. 2.

Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen bestimmten Gränzen in einem gegebenen Beobachtungsresultat.

Um nun den Ausdruck dieser Wahrscheinlichkeit W durch das bestimmte Integral

$$W = \int_a^b dx.\varphi x$$

zu erweisen; wo $a,\ b$ die Gränzwerthe des Fehlers sind und φx eine Function der Fehlergröfse ist, welche die oben erörterte, von *Gaufs* aufgestellte Bedeutung hat, gehe ich, da die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zunächst discrete Anzahlen betreffen, von einer ähnlichen Voraussetzung über die Beobachtungsfehler aus; und von da stufenweise fort zur Betrachtung einer Folge von stetig sich ändernden Fehlern, mit stetig sich änderndem Leichtigkeitsgrade.

1. Es seien im Ganzen N Fehler von verschiedener Gröfse möglich, und alle gleich möglich (gleich leicht zu begehen, gleich häufig zu erwarten), so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs ein bestimmter unter ihnen einem gegebenen Beobachtungsresultat anhafte, $\frac{1}{N}$, und wenn die N Fehler in Gruppen vertheilt werden, die $n,\ n'$ u. s. w. Fehler enthalten, so sind die Wahrscheinlichkeiten, dafs es einer der $n,\ n'$ etc. Fehler sei, beziehungsweise $\frac{n}{N}$, $\frac{n'}{N}$ u. s. w.; d. h. die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler aus

einer gewissen Gruppe zu begehen, ist proportional der Anzahl der Fehler in dieser Gruppe.

2. Nun seien zwar immer noch die Fehler in jeglicher Gruppe gleich möglich, aber nicht die der verschiedenen Gruppen, sondern die Fehler der ersten, zweiten u. s. w. sollen verschiedene Möglichkeitsgrade haben, die sich wie die Zahlen m, m' etc. verhalten; welche Verhältnifszahlen man auf ganze Zahlen reducirt voraussetzen kann, (wenigstens mit beliebiger Annäherung bei irrationalen Verhältnissen). Dieser Fall reducirt sich aber auf den vorhergehenden durch die Bemerkung, dafs dies soviel ist, als wenn die Gruppen mn, $m'n'$ etc. *gleich* mögliche Fehler enthielten. Setzt man daher $M = \Sigma mn$, so sind die Wahrscheinlichkeiten, dafs der einem gegebenen Beobachtungsresultat anhaftende Fehler der ersten, zweiten etc. Gruppe angehöre, beziehungsweise $\frac{mn}{M}$, $\frac{m'n'}{M}$ u. s. w., d. h. proportional den Producten aus den Anzahlen der in den betreffenden Gruppen enthaltenen Fehler in die zugehörigen Verhältnifszahlen der Möglichkeit. Da man ferner an die Stelle der letztern ihre Quotienten durch eine und dieselbe Zahl setzen kann, so sei $k = \frac{m}{M}$, $k' = \frac{m'}{M}$ etc.; welche Werthe die *Wahrscheinlichkeitscoëfficienten* der resp. Fehlergruppen heifsen sollen. Dann reduciren sich die Ausdrücke jener Wahrscheinlichkeiten auf die Producte kn, $k'n'$ u. s. w.

3. Wir wollen jetzt an die Stelle der discreten Mengen von Fehlern eine stetige Gröfsenfolge innerhalb der absoluten Fehlergränzen setzen, und I sei der Unterschied oder das Intervall zwischen dem gröfsten positiven und dem gröfsten negativen Fehler; desgleichen sollen alsdann an die Stelle jener Gruppen Intervalle i, i' u. s. w. innerhalb des Total-Intervalls I treten.

Sind wiederum zuerst alle Fehler gleich möglich, so ist offenbar die Wahrscheinlichkeit w, dafs der einem gegebenen Beobachtungsresultat anhaftende Fehler in ein solches Intervall i falle, (d. h. zwischen den Werthen x und $x+i$ enthalten sei), eine blofse Function von i,

$$w = fi,$$

und desgleichen

$$w + \Delta w = f(i + \Delta i).$$

Aber andrerseits ist die Wahrscheinlichkeit $w + \Delta w$, dafs der Fehler in das Intervall $i + \Delta i$ falle, soviel als die, dafs er entweder in das Intervall i, oder in das Intervall Δi falle: mithin ist sie die Summe der beiden Wahrschein-

lichkeiten, die sich auf beide Intervalle für sich beziehen und deren Ausdrücke

$$w = fi \quad \text{und} \quad f(\Delta i) = \Delta w$$

sind. Man hat also zur Bestimmung der Function f die Functionalgleichung

$$f(i + \Delta i) = fi + f(\Delta i),$$

aus welcher nach dem oben (§. 1, 8.) citirten Satze folgt, dafs die Wahrscheinlichkeit w dem Intervall i proportional, also dafs

$$w = Ci$$

ist, wo C eine Constante bedeutet. Um dieselbe zu bestimmen, erinnern wir uns, dafs die natürliche Einheit der Wahrscheinlichkeiten die *Gewifsheit* ist, und dafs diese, $w = 1$, eintritt, wenn $i = I$. Demnach ist

$$1 = CI, \quad \text{mithin} \quad C = \frac{1}{I} \quad \text{und} \quad w = \frac{i}{I}.$$

Sollte Jemand dieses Resultat als für sich evident erklären, so habe ich nichts Entscheidendes dagegen einzuwenden und stelle es eines Jeden Geschmack anheim, ob er diese Proportionalität, oder den allgemeinen Satz von der Entweder-Oder-Wahrscheinlichkeit, worauf der Beweis sich gründet, für unmittelbarer halten wolle. (Dieser Satz läfst sich nämlich für unsern Fall unter Voraussetzung des Resultats dieser Nummer ebenso einfach beweisen, wie im Falle discreter Anzahlen.)

4. Es seien nun die Fehler in den einzelnen Intervallen *nicht* gleich möglich, und die Verhältnifszahlen der Möglichkeit seien wie in No. 2. resp. m, m' etc.: so zeigt sich, durch ganz ähnliche Schlüsse wie dort, indem nun gemäfs No. 3. die Gröfsen der Intervalle i an die Stelle der Anzahlen n treten, dafs, wenn

$$M = mi + m'i' + \ldots$$

gesetzt wird, und überdies die Quotienten

$$k = \frac{m}{M}, \quad k' = \frac{m'}{M} \quad \text{u. s. w.}$$

unter dem Namen *Wahrscheinlichkeitscoëfficienten*, wie dort, eingeführt werden, die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Intervalle durch die Producte aus deren Gröfsen in jene Coëfficienten gemessen werden und dafs

$$w = ki, \quad w' = k'i' \quad \text{u. s. w. ist.}$$

Uebrigens hat man, eben so wenig wie in No. 2., nöthig, auf die gedachte Vorstellung sich einzulassen, sondern kann einfach wie folgt schliefsen. Da bei gleicher Möglichkeit die Wahrscheinlichkeiten erwiesenermaafsen sich verhalten wie die Intervalle, bei gleichen Intervallen aber,

offenbar wie die Verhältnifszahlen der Möglichkeit, so verhalten sie sich, wenn beide verschieden sind, wie die Producte aus beiden, d. h., es ist

$$w = Cmi, \quad w' = Cm'i' \text{ u. s. w.};$$

nur ist dann noch die Constante zu bestimmen. Summirt man aber alle diese Gleichungen für das ganze Intervall I, was

$$\Sigma w = C\Sigma mi$$

giebt, so ist $\Sigma mi = M$ und $\Sigma w = 1$, mithin

$$C = \frac{1}{M} \quad \text{und} \quad w = \frac{mi}{M} \stackrel{\circ}{=} ki.$$

5. Es zerfalle nunmehr das Total-Intervall I der Fehler in eine Menge gleich grofser Intervalle i, so dafs der Wahrscheinlichkeitscoëfficient in jedem derselben constant sei, aber von einem zum andern sich ändere, und es handle sich um den Ausdruck der Wahrscheinlichkeit w, dafs der Fehler eines gegebenen Beobachtungsresultats zwischen x und $x+\Delta x$ oder in das Intervall Δx falle, welches eine Anzahl n jener Intervalle i enthält, so dafs $\Delta x = ni$. Die Intervalle i zwischen x und $x+i$, $x+i$ und $x+2i$ u. s. w. sollen der Reihe nach das nullte, erste u. s. w. bis zum $n-1$ten heifsen, und die zugehörigen Wahrscheinlichkeitscoëfficienten seien $y_0, y_1, \ldots. y_{n-1}$, so sind die Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers innerhalb der einzelnen Intervalle der Reihe nach

$$y_0 i, \quad y_1 i, \quad \ldots. \quad y_{n-1} i,$$

und diejenige, dafs der Fehler in irgend eines derselben, mithin in das Intervall Δx falle, ist als Summe jener partiellen Wahrscheinlichkeit,

$$w = (y_0 + y_1 + \ldots. + y_{n-1}) i.$$

6. Diese Wahrscheinlichkeit w ist nun die Hülfsgröfse, welche mit der gesuchten Wahrscheinlichkeit W coïncidirt, wenn n unendlich grofs oder i unendlich klein wird; und da alsdann die Wahrscheinlichkeitscoëfficienten von einem Fehler zum andern sich ändern, und zwar, wie wenigstens als nahezu richtig jedenfalls angenommen werden darf (cf. §. 3.), auf stetige Weise, so sind zugleich die Gröfsen y, als die successiven Werthe einer stetigen Function der Fehlergröfse, als Variabeln zu betrachten. Setzt man demnach

$$y = \varphi x,$$

welche Function nun offenbar die von *Gaufs* ihr beigelegte Bedeutung hat und füglich den Namen *Wahrscheinlichkeitscoëfficient des Fehlers* x führt, so ist

$$w = [\varphi x + \varphi(x+i) + \ldots + \varphi(x+(n-1)i)]i$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \varphi\left(x+\lambda\frac{\Delta x}{n}\right).\frac{\Delta x}{n};$$

und diese Summe geht, nach einem bekannten Fundamentalsatz der Analysis, für $n=\infty$ oder $i=0$ in das *Integral* zwischen den Gränzen x und $x+\Delta x$ über, nemlich in

$$w = \int_x^{x+\Delta x} dx.\varphi x,$$

oder, wenn insbesondere $x=a$, $x+\Delta x = b$ gesetzt wird, in

$$w = \int_a^b dx.\varphi x.$$

Dieser Satz, welcher bei der einfachen Infinitesimalmethode die Erklärung des Integrals selbst ist, wird übrigens dadurch bewiesen, dafs die Entwicklung jener Summe nach i aus zwei Theilen besteht: einem Theile, der mit i verschwindet, und einem, aus welchem vermöge $ni=\Delta x$ die Zahl n sich wegschaffen läfst, nämlich aus

$$\varphi x.\Delta x + \frac{d\varphi x}{dx}.\frac{\Delta x^2}{2} + \ldots,$$

d. h. aus der Entwicklung des Integrals $\int_x^{x+\Delta x} dx.\varphi x$ nach Δx, indem, wenn Fx die Function ist, deren Ableitung φx,

$$\int_x^{x+\Delta x} dx.\varphi x = F(x+h) - Fx$$
$$= \frac{dFx}{dx}\Delta x + \frac{d^2Fx}{dx^2}.\frac{\Delta x^2}{2} + \ldots$$
$$= \varphi x\,\Delta x + \frac{d\varphi x}{dx}.\frac{\Delta x^2}{2} + \ldots \text{ ist.}$$

7. Zugleich erhellet hieraus, dafs die Wahrscheinlichkeit, um die es sich handelt, immer in eine Reihe nach Potenzen des Intervalls, in welchem der Fehler enthalten sein soll, sich entwickeln läfst. Je kleiner nun das Intervall ist, um so maafsgebender wird das erste Glied, und mit um so gröfserer Annäherung kann die Wahrscheinlichkeit w, dafs der Fehler eines Beobachtungsresultats zwischen $= a$ und $x = a+i$ liegen werde, wo i jenes sehr kleine Intervall ist, durch

$$w = i\varphi a$$

anstatt durch

$$w = i(\varphi a + \tfrac{1}{2}i\,\varphi' a + \ldots)$$

wo $\varphi' x = \frac{d\varphi x}{dx}$ u. s. w. ist, vorgestellt werden. Wie sich dies, hier vom rein analytischen Standpunct aus bemerkt, zum empirischen Sachbestande verhält, wird im nächsten Paragraph zur Sprache kommen.

8. Was endlich das unbestimmte Integral oder die Function Fx (No. 6.), deren Ableitung φx ist, betrifft, so verhält es sich hier wie mit andern Anwendungen der Integralrechnung, z. B. auf den Flächenraum einer Curve. So wie man diesen als eine Function der Abscisse, deren Ableitung alsdann die die Ordinate vorstellende Function der Abscisse ist, betrachtet, natürlich (da eigentlich einem bestimmten Abscissenwerth zunächst gar kein Werth jener Function entspricht) in dem Sinne, dafs die betreffende Function einen vom unbestimmten Anfange bis zu irgend einem Abscissenwerth, oder von diesem an ins Unbestimmte sich erstreckenden Flächenraum vorstellt: so kann man auch in unserem Falle die Wahrscheinlichkeit, dafs einem Beobachtungsresultat ein unbestimmter Fehler anhafte, von dem nämlich nur eine Gränze, d. h. irgend ein möglicher Fehlerwerth x gegeben ist, als eine Function Fx dieses Fehlerwerthes aufstellen, von welcher die Ableitung nach x alsdann eine andere Function φx von x ist, deren Bedeutung sich sofort als die des Wahrscheinlichkeitscoëfficienten ergeben müfste. Man könnte hiebei auch direct nach der *Nörrenberg*schen Methode zu Werke gehen (s. „Ueber die Differentialcoëfficienten unbekannter Functionen," eine Abhandlung *Nörrenbergs* in der Baumgarten-Ettinghausenschen Zeitschrift, die einen wesentlichen Nachtrag zur Functionentheorie bildet): indefs würden die Hauptmomente der Aufstellung und Entwicklung der Hülfsgröfse mit denen der obigen Deduction zusammentreffen; die mir im Uebrigen genetischer zu sein scheint.

§. 3.

Untersuchungen über die Function φx.

1. Die Gesetze, denen man, übereinstimmend mit der Erfahrung, die zufälligen Fehler guter Beobachtungen unterwirft, sind bekanntlich folgende drei. *Erstens,* positive und negative, dem Zahlenwerth nach gleiche Fehler, sind gleich möglich. *Zweitens,* für jede Gattung von Beobachtungen giebt es eine Gränze der absoluten Gröfse der Fehler, über welche hinaus kein Fehler mehr möglich ist, so dafs, wenn g diese Gränze bezeichnet, das Total-Intervall der möglichen Fehler $I = 2g$, und $x = 0$ der mittlere Fehler ist. *Drittens,* innerhalb der Gränzen $\pm g$ der möglichen Fehler hängt der Grad

der Möglichkeit oder Wahrscheinlichkeit von der Gröfse der Fehler ab, so dafs derselbe von der Fehlergränze an nach dem mittleren Fehler $x=0$ zu, wo er sein Maximum erreicht, stetig (wenigstens nahezu) zunimmt; aber nicht proportional zu der Fehlergröfse, sondern um das Maximum her langsam, nach den Gränzen zu rasch sich ändernd. Durch diese Gesetze ist aber bereits diejenige Form der Function φx als die einfachste indicirt, welche sofort durch die weitere Bedingung, der man sie unterwirft, dafs sie nämlich zu dem Princip des arithmetischen Mittels führen soll, wirklich festgesetzt wird; wozu noch ersichtlicherweise kommt, dafs diese Function für jeden möglichen Fehlerwerth einen einzigen positiven Werth geben mufs; denn wenn das erste Gesetz eine gerade Function von x anzeigt, so wird das dritte durch eine mit x abnehmende Exponentialfunction dargestellt. Man wird mithin nach Allem auf

$$\varphi x = Ce^{-cx^2},$$

wo e die gewöhnliche Bedeutung hat und C und c wesentlich positive Constanten sind, geführt; als auf die einfachste stetige Function, welche zunächst denjenigen Bedingungen genügt, die innerhalb der Fehlergränzen stattfinden. Dazu kommt aber noch die im zweiten Gesetz enthaltene Bedingung, und man könnte versucht sein, dieselbe dadurch darzustellen, dafs die Function an den Fehlergränzen für $x=\pm g$ verschwinden und jenseits derselben unmögliche Werthe, wozu für unsern Fall nicht blofs imaginäre, sondern auch negative Werthe gehören, geben solle. Wenn ferner die Darstellung der Unmöglichkeit durch imaginäre Werthe unvereinbar ist mit der Bedingung des einzigen positiven Werthes innerhalb der Fehlergränzen, so würden negative Werthe dazu sich eignen, wenn man noch die wesentlich positive Constante C' beifügt und

$$\varphi x = Ce^{-cx^2} - C',$$

d. h., wegen $\varphi x = 0$ für $x = \pm g$,

$$\varphi x = C(e^{-cx^2} - e^{-cg^2})$$

setzt. Allein diese Auffassung des zweiten Gesetzes ist unstatthaft: denn da die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler eines Beobachtungsresultats zwischen den Fehlergränzen, folglich auch zwischen zwei noch entlegeneren Werthen von x enthalten sei, Gewifsheit sein mufs, so hat man nicht nur, was auch die Function φx sein mag,

$$\int_{-g}^{+g} dx \,.\, \varphi x = 1,$$

sondern auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \, . \, \varphi x \gtreqless 1;$$

was bei der letztern Form von φx überhaupt bei jener Darstellung des dritten Gesetzes nicht möglich ist. Es kann daher dasselbe nur dadurch dargestellt werden, dafs φx nicht blofs für die Fehlergränzen, sondern auch für alle dieselben überschreitenden Werthe von x verschwinden soll, so dafs

$$\int_{-g}^{+g} dx \, . \, \varphi x = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, . \, \varphi x = 1$$

ist. Allein dann ist φx eine discontinuirliche Function; und dies wäre nun entweder genau analytisch darzustellen, oder blofs näherungsweise, durch eine stetige Function, welche zwar für keinen Werth von x verschwindet, aber bei einiger Zunahme von x so rasch abnimmt, dafs sie von den Fehlergränzen an nicht nur selbst unmerklich kleine Werthe hat, sondern auch das Integral

$$\int_{g}^{\infty} dx \, . \, \varphi x$$

zu einer zu vernachlässigenden Gröfse macht. Dies ist nun eben der Fall bei einer Exponentialfunction wie e^{-cx^2}, und man kann sich dann auch noch erlauben, an die Stelle der die Constante C bestimmenden Bedingung

$$C \int_{-g}^{+g} dx \, . \, e^{-cx^2} = 1,$$

aus welcher man für C eine Function von g und c erhielte, näherungsweise

$$C \int_{-\infty}^{\infty} dx \, . \, e^{-cx^2} = 1$$

zu setzen, wodurch, nach dem bekannten Werthe dieses Integrals, C eine blofse Function von c wird, nämlich, indem man h^2 für c setzt,

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{und somit} \quad \varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2};$$

so dafs es sich jetzt nur noch um die eine Constante h handelt. Diese näherungsweise Behandlung kann man sich um so eher erlauben, als die Fehlergränze nie genau bekannt, sondern, wie jede empirische Gröfse, überhaupt als eine unbestimmte, zwischen gewissen, wenn auch noch so engen Gränzen enthaltene Gröfse anzusehen ist.

II. Die letztere Bemerkung führt zu einer weiteren Betrachtung über die Natur der Function φx, wonach die dafür aufgestellte stetige Form nicht nur deswegen eine genäherte ist, weil die Bedingungen, die

dazu führen, nur auf Plausibilitätsgründen beruhen; auch schon weil an der Fehlergränze eine Auflösung der Stetigkeit wirklich Statt findet: sondern ich glaube, man darf noch weiter gehen, und behaupten, daſs überhaupt stetige Functionen, wie die bestimmten Integrale in diesem und dem vorigen Paragraph, eigentlich von analytischer Seite nur als Näherungen zu betrachten sind, während die in §. 2. als Hülfsgröſse betrachtete Summe eigentlich dem empirischen Sachbestande am getreuesten entspricht. Da es nämlich für jede Gattung von Beobachtungen eine Gränze des nicht mehr Wahrnehmbaren und daher auch nicht mehr Unterscheidbaren giebt, so sind empirisch alle Werthe des Fehlers x, deren Unterschiede jene Gränze nicht übersteigen, als gleich anzusehen, und gleich leicht zu begehen; und mithin ist der Wahrscheinlichkeitscoëfficient innerhalb eines Intervalls von dieser Kleinheit erfahrungsmäſsig wirklich constant. Bezeichnet daher fortan i eine solche kleine Gröſse, so darf $i\varphi x$ mit Recht als die Wahrscheinlichkeit eines einem Beobachtungsresultat anhaftenden Fehlers zwischen x und $x+i$, oder vielmehr zwischen $x-\frac{1}{2}i$ und $x+\frac{1}{2}i$, betrachtet werden, und kann auch *Wahrscheinlichkeit des Fehlers* x heiſsen, insofern derselbe, als empirische Gröſse, eben auch nur einen zwischen solchen Gränzen enthaltenen Fehler bedeuten kann. — Von diesem Gesichtspuncte aus dürfte sich auch noch eine Bedenklichkeit erledigen, die gegen die Anforderungen an die Function φx, wie sie in der vorigen Nummer angegeben wurden, erhoben werden könnte. Da nämlich φx von der Fehlergränze an mit abnehmendem x zunehmen muſs, so könnte noch gefragt werden, ob sich dieser Gang der Function genau bis $x=0$ erstrecke, oder ob nicht etwa für diesen Werth ein relatives Minimum, und zu jeder Seite desselben ein absolutes Maximum Statt finden möchte. Es geht aber aus den *Bessel*schen Rechnungen in den *Fundamentis Astronomiae* hervor, daſs solches jedenfalls in einem Abstande vom Nullwerth Statt finden muſs, der die vielbesprochene Kleinheit nicht übersteigt: daſs also die drei Werthe, die beiden Maxima und das Minimum, in ein Intervall fallen werden, innerhalb dessen man vielmehr einen gleichen Wahrscheinlichkeitsgrad, mithin einerlei Werth von φx, der dann dem Werthe $x=0$ entspricht, zu fordern hat.

III. So wenig die relative Wahrscheinlichkeit eines Fehlers mit der absoluten verwechselt werden darf, so wenig läſst sich doch jene auf diese, oder der Wahrscheinlichkeitscoëfficient auf eine Wahrscheinlichkeit zurück-

führen. Gehen wir auf die ursprüngliche Festsetzung §. 2. 4. zurück, wo i noch beliebig ist, und setzen $i=1$, so ist $w=k$: d. h. der Wahrscheinlichkeitscoëfficient ist gleich der Wahrscheinlichkeit. Eben so verhält es sich, wenn wir nach dem Gesichtspunct der vorigen Nummer für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x,

$$w = i\varphi x$$

setzen und sofort die sehr kleine Gröfse i zur Einheit der Fehlergröfsen nehmen. Weiterhin kann man aber auch, in Voraussetzung einer vollkommen stetigen Aenderung des Wahrscheinlichkeitscoëfficienten, sagen, er, d. h. die Function φx, sei die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler zwischen x und $x+i$ enthalten sei, wenn i zur Einheit genommen würde und alle Fehler in diesem Einheits-Intervall gleich möglich wären.

IV. Bedeutet w die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen gewissen Gränzen, der einem Beobachtungsresultat anhaftet, sei es, dafs er durch $i\varphi x$, oder durch $\int_a^b dx.\varphi x$ auszudrücken ist: so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler irgend einer von N Beobachtungen anhafte, Nw, und wenn N hinreichend grofs ist, damit $Nw \gtreqless 1$, so läfst sich mit Gewifsheit erwarten, dafs der betreffende Fehler in den N Beobachtungen sich finden werde; und zwar $m$mal, wenn m die ganze Zahl ist, die zunächst kleiner ist als Nw. Man kann daher überhaupt sagen, dafs Nw die Anzahl ausdrücke, wie oft der Fehler, dessen Wahrscheinlichkeit w ist, in einer Anzahl N von Beobachtungen gesetzmäfsig vorkommen sollte; und die erwähnten *Bessel*schen Rechnungen haben gezeigt, dafs die nach der in No. I. aufgestellten Form der Function φx berechneten Werthe von Nw mit der Erfahrung gut übereinstimmen. Ist insbesondere $x=i\varphi x$, wo i die Bedeutung von No. II. haben soll, und setzt man $i=\frac{I}{n}$, wo I wie in §. 2. das Total-Intervall der Fehler $I=2g$ ausdrückt, so hat man $N\frac{I}{n}\varphi x$; was sich für $N=n$ auf $I\varphi x$ oder $2g\varphi x$ reducirt; und hieraus erhellt, dafs, wenn es sich um die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers im strengen Sinne in einer Anzahl von Beobachtungen handelt, also wenn n unendlich ist, dieselbe für jede endliche Anzahl N unendlich klein ist und nur für eine unendliche Menge von Beobachtungen auf den endlichen Werth $I\varphi x$ sich reducirt, der überhaupt für $N=n$ statt findet. (Man vergleiche hiemit die Bemerkung im Eingange bei der Besprechung der *Enke*schen Darstellung.)

§. 4.

Princip für die Herleitung einer Anzahl von Elementen aus einer gröfsern Anzahl von Beobachtungen.

Es handelt sich jetzt darum, zu beweisen, dafs aus n Beobachtungen, deren unmittelbare Gegenstände bekannte Functionen von V Elementen sind, wobei $n > V$, die besten oder wahrscheinlichsten Werthe dieser Elemente diejenigen sein werden, welche das Product der Wahrscheinlichkeitscoëfficienten der n Beobachtungsfehler x_1, x_2, ... x_n,

$$P = \varphi x_1 \varphi x_2 \times .... \times \varphi x_n,$$

zu einem Maximum machen; was bei Zugrundelegung der Functionsform

$$\varphi x = \frac{h}{\sqrt{p}} e^{-h^2 x^2}$$

die Methode der kleinsten Quadrate giebt.

1. Nach §. 1. ist die Wahrscheinlichkeit W, dafs in n Beobachtungen die Fehler $x_1 .... x_n$ coëxistiren, deren Wahrscheinlichkeiten für sich $w_1 .... w_n$ sind, das Product

$$W = w_1 w_2 \times .... w_n;$$

woraus sich

$$W = i^n \varphi x_1 \varphi x_2 \times .... \times \varphi x_n = i^n P$$

ergiebt, wenn man für die Wahrscheinlichkeiten der Fehler, aus dem Gesichtspuncte §. 3. II.,

$$w_1 = i\varphi x_1, \quad w_2 = i\varphi x_2 \text{ u. s. w.}$$

setzt, wo i eine beliebig kleine Gröfse bedeutet, die das Unmerklich-Kleine auf dem betreffenden Gebiet keinesfalls übersteigt. Alsdann aber erhellet ferner, dafs das Maximum von W, da auf i, als Constante, nichts ankommt, mit demjenigen von P zugleich gegeben ist. — Setzt man dagegen, vom analytischem Standpuncte aus, die vollständigen Werthe

$$w_1 = i\varphi x_1 + \tfrac{1}{2} i^2 \frac{d\varphi x_1}{dx_1} + ..., \quad w_2 = i\varphi x_2 + \tfrac{1}{2} i^2 \frac{d\varphi x_2}{dx_2} + ... \text{ u. s. w.}$$

der Wahrscheinlichkeiten, dafs die n Fehler zwischen x_1 und $x + i$, x_2 und $x_2 + i$ u. s. w. enthalten seien, so erhält man für W eine nach Potenzen von i fortschreitende Reihe; nämlich man erhält, wenn die Coëfficienten dieser Entwicklung mit P, P' u. s. w. bezeichnet werden, nebst dem was Producte der Functionen φ und ihrer Ableitungen und constante Divisoren sind, wobei insbesondere P den obigen Werth hat:

$$W = i^n (P + iP' + ...).$$

Je kleiner nun i ist, um desto mehr wird die Coëxistenz bestimmter, oder vielmehr mit dem Spielraum des Unendlich-Kleinen begabter Beobachtungsfehler ausgedrückt: desto maafsgebender wird aber auch für den Werth von W die Gröfse des Coëfficienten P, und mit desto gröfserer Annäherung kann man W als der Gröfse P proportional und diese als den Wahrscheinlichkeitscoëfficienten des ganzen Fehlersystems $(x_1, x_2, \ldots.)$ betrachten: desto mehr endlich wird das Maximum von W mit dem von P zugleich gegeben sein. Auf diese Weise hätte man also hier ein Näherungsresultat.

2. Sind nun die n Gröfsen, deren mit den Fehlern $x_1, x_2, \ldots.$ beobachtete Werthe $a_1, a_2, \ldots.$, sind, bekannte Functionen $f_1, f_2, \ldots.$ von N Elementen $p, q, \ldots.$, um deren wahrscheinlichste Bestimmung nach diesen Beobachtungen es sich handelt, so sind diese plausibelsten Werthe von $p, q, \ldots.$ offenbar diejenigen, welche mit allen Beobachtungen zusammen am besten übereinstimmen, welche also Werthe der Functionen $f_1, f_2, \ldots.$ der Art liefern, dafs die Differenzen $f_1 - a_1$, $f_2 - a_2$ u. s. w., d. h. die Fehler $x_1, x_2, \ldots.$ möglichst klein, mithin die Functionen φx_1, φx_2 u. s. w., und folglich die Wahrscheinlichkeiten $i\varphi x_1$, $i\varphi x_2$ u. s. w. der Fehler möglichst grofs werden: *aber nicht die einzelnen für sich, sondern alle, ausgleichenderweise, zusammen,* d. h. so, dafs die Wahrscheinlichkeit ihrer Coëxistenz, die Gröfse W, mithin nach No. 1. das Product P der Wahrscheinlichkeitscoëfficienten, ein Maximum wird, und dafs endlich, bei der angenommenen Form der Function φx, die Quadratensumme der Fehler ein Minimum ist.

3. Bis jetzt habe ich mich nicht davon überzeugen können, dafs diese oder eine ähnliche Darstellung zum Beweise des Satzes nicht hinreiche; und also auch nicht davon, dafs hierzu der von *Gaufs* in der *Theoria motus* §. 176. aufgestellte allgemeine Satz nothwendig sein sollte. Seien, um noch näher hierauf einzugehen, $p', q', \ldots.$; $p'', q'', \ldots.$ zwei verschiedene hypothetisch angenommene Werthsysteme der Elemente, und $f_1', f_2', \ldots.$; $f_1'', f_2'', \ldots.$ die danach berechneten Werthe der Functionen f, also die Differenzen

$f_1' - a_1 = x_1'$, $f_2' - a_2 = x_2'$ u. s. w die Fehler in der ersten,
$f_1'' - a_1 = x_1''$, $f_2'' - a_2 = x_2''$ u. s. w. diejenigen in der zweiten Hypothese, endlich $\varphi x_1', \varphi x_2', \ldots.$ P' die Wahrscheinlichkeitscoëfficienten der einzelnen Fehler und ihrer Coëxistenz (denen nach No. 1. die Wahrscheinlichkeiten selbst proportional gelten, sei es auch nur annähernd) in der ersten; ebenso $\varphi x_1'', \varphi x_2'', \ldots.$ P'' die in der zweiten Hypothese: so ist offenbar diejenige

der beiden Hypothesen vorzuziehen, welche den gröfsern Werth von P liefert, weil sie hierdurch mit dem Inbegriff der Beobachtungen besser übereinstimmt, indem sie ihre Fehler im Ganzen kleiner, also wahrscheinlicher macht. Weiter zu gehen ist aber nicht nöthig; es ist ganz gleichgültig, wie die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen analytisch darzustellen sein mögen, und ob sie denen der entsprechenden Fehlersysteme proportional sind, oder nicht.

§. 5.

Betrachtungen über das arithmetische Mittel und über die mittleren Werthe überhaupt.

Bekanntlich wird die mehrerwähnte Form der Function φx, wie sie schon durch die Betrachtungen in §. 3. als die einfachste der den allgemeinen Bedingungen genügenden stetigen Functionen sich dargeboten hat, durch die weitere Bedingung wirklich hergeleitet, dafs das im vorigen Paragraph aufgestellte Princip in dem besondern, einfachsten Falle, wo es sich um ein einziges Element handelt, welches zugleich Gegenstand der unmittelbaren Beobachtung ist, auf das Princip des arithmetischen Mittels sich reduciren soll. Deshalb sucht *Encke* dieses Princip a priori, wenn nicht zu beweisen, so doch plausibel zu machen. Uebrigens führt seine Betrachtung streng genommen nur dahin, dafs der wahrscheinlichste Werth einer Gröfse, aus n beobachteten Werthen derselben, eine lineäre symmetrische Function dieser Werthe, und zwar von der Art sein müsse, dafs sie, im Fall jene n Beobachtungswerthe einander gleich wären, auf diesen, dann einzig möglichen Werth, sich reduciren würde. Dies geht aus folgenden Bemerkungen hervor; zugleich aber, dafs das arithmetische Mittel ganz besonders sich empfiehlt.

I. Es sei x der gesuchte plausibelste, $a_1, \ldots. a_n$ seien die beobachteten n Werthe, S_m sei die Summe ihrer $m$ten Potenzen; ferner seien C_m, C'_m, V_m, V'_m resp. die Summen ihrer Combinationen ohne und mit-, und ihrer Variationen ohne und mit Wiederholungen zur $m$ten Classe, deren Anzahlen beziehungsweise

$$c_m = \frac{n(n-1)\ldots.(n-m+1)}{1.2\ldots.m}, \quad v_m = n(n-1)\ldots.(n-m+1),$$

$$c'_m = \frac{n(n+1)\ldots.(n+m-1)}{1.2\ldots.m}, \quad v'_m = n^m$$

sind: so sind die Functionen

$$\sqrt[m]{\frac{S_m}{n}}, \quad \sqrt[m]{\frac{C_m}{c_m}}, \quad \sqrt[m]{\frac{V_m}{v_m}}, \quad \sqrt[m]{\frac{C'_m}{c'_m}}, \quad \sqrt[m]{\frac{V'_m}{v'_m}}$$

sämmtlich, für alle Anzahlen m, von der Art, dafs sie jenen Bedingungen Genüge leisten; zugleich aber Mittelgröfsen der gegebenen, wofern man nur in etwaigen Fällen, wo die beobachteten Werthe theils positiv, theils negativ sein können, nicht nur diejenigen ausschliefst, welche imaginär sind, sondern auch diejenigen, welche die Zeichen-Unterschiede verwischen würden, während, wenn die Gröfsen a sämmtlich positiv sind, jene Behauptung von allen gilt. Davon sind übrigens die zweite und dritte immer identisch; denn es ist

$$V_m = 1.2.3\ldots.m.C_m \quad \text{und} \quad v_m = 1.2.3\ldots.m.c_m,$$

und als besonderer Fall ist darin das sogenannte geometrische Mittel q enthalten; denn für $m=n$ ist

$$C_n = a_1 a_2 \times \ldots. a_n \quad \text{und} \quad c_n = 1,$$

und es reducirt sich mithin die Function $\sqrt[m]{\frac{C_m}{c_m}}$ auf

$$q = \sqrt[n]{(a_1 a_2 \times \ldots. a_n)}.$$

Da ferner die letzte der obigen Functionen für alle Werthe von m auf das arithmetische Mittel p sich reducirt, indem

$$V'_m = (a_1 + a_2 + \ldots. a_n)^m, \quad \text{mithin}$$

$$\sqrt[m]{\frac{V'_m}{v'_m}} = \sqrt[m]{\frac{(a_1+\ldots.+a_n)^m}{n^m}} = \frac{a_1+a_2+\ldots.+a_n}{n} = p$$

das arithmetische Mittel ist, welches sich auch aus der ersten Form für $m=1$ ergiebt: so bleiben die drei allgemeinen Formen

$$\sqrt[m]{\frac{S_m}{n}}, \quad \sqrt[m]{\frac{C_m}{c_m}}, \quad \sqrt[m]{\frac{C'_m}{c_m}}$$

für x übrig, die man noch vermehren könnte, wenn man die Potenzen der Gröfsen a aufs neue combinirte und die unter dem Namen arithmetischer Mittel verschiedener Ordnungen begriffenen zusammenfafste, (so dafs p dasjenige der ersten Ordnung wäre;) wenn man es nicht etwa vorzieht, diese Benennung auf die in der ersten Form enthaltenen Functionen zu beschränken.

II. Unter allen in jenen Formen enthaltenen Functionen der Gröfse a ist nun die des arithmetischen Mittels p die einfachste, und insofern die natürlichste und zweckmäfsigste; wenn dem sonst nichts entgegensteht. Dazu kommen aber noch folgende sie empfehlende Eigenschaften.

1. Dem, dafs für $x=p$ die Summe der Unterschiede verschwindet und $\Sigma(x-a)=0$, mithin $\Sigma(x-a)^2$ ein Minimum ist, steht zwar

Aehnliches für die andere zur Seite, indem, wenn überhaupt $x = \sqrt[m]{\frac{S_m}{n}}$ gesetzt wird, $\Sigma(x^m - a^m) = 0$ und $\Sigma(x^m - a^m)^2$ zum Minimum wird.

2. Dagegen kommt es der Function p ausschliefslich zu, dafs wenn die Werthe a eine arithmetische Progression bilden, p dem mittleren Gliede derselben, oder der halben Summe des gröfsten und kleinsten Werthes, gleich wird: eine Eigenschaft, die man vielleicht schlechthin von der gesuchten Mittelgröfse verlangen dürfte; entsprechend der Forderung, dafs die Mittelgröfse, wenn die Werthe a gleich werden, auf eben den Werth sich reduciren soll.

3. Es ist ferner von Bedeutung, dafs $p = \sqrt[m]{\frac{V'_m}{v'_m}}$ ist. Denn die Summe der Variationen mit Wiederholungen V'_m ist in jeder Ordnung m die allein vollständige Verbindung der Elemente, während die Elemente bei den übrigen derselben Ordnung nicht auf alle mögliche Arten verbunden werden; und dies läfst sich als weitere Ausführung der in dem Ausdruck von p liegenden Bemerkung betrachten, die ohne Zweifel zum Gebrauch des arithmetischen Mittels geleitet hat, damit bei demselben jede der concurrirenden Gröfsen ihre legitime Quote zum Resultat beitrage.

4. Endlich kommt hinzu, dafs alle Werthe von x, die man aus der ersten Form, wo blofs Potenzen der Gröfsen a vorkommen, für $m > 1$ zieht, gröfser als p sind; und zwar um so mehr, je gröfser m ist; und dafs im Gegentheil alle diejenigen aus der zweiten Form, wo blofs Producte der Gröfsen a vorkommen, kleiner als p ausfallen; und zwar wiederum um so mehr, je gröfser m ist; so dafs das geometrische Mittel q das Minimum aller in nähern Formen enthaltenen Mittelgröfsen ist; denn diejenigen aus der dritten Form endlich, wo Potenzen und Producte der a eingehen, theilen die Eigenschaft der ersten Form; und zwar so, dafs bei einerlei Werth von m die Function der dritten Form dem arithmetischen Mittel näher kommt, als die der ersten; wie denn auch in jener die Summe der Combinationen mit Wiederholungen derjenigen der Variationen mit Wiederholungen hinsichtlich der Vollständigkeit der Verbindungen der Elemente näher steht, als in der ersten Form die Potenzsumme; so dafs nach allem dem das arithmetische Mittel das Mittel unter den Mitteln genannt werden dürfte: unter den Mittelgröfsen nämlich, welche nach den zu Anfang des Paragraphs aufgestellten Grundbedingungen als mögliche Werthe von x concurriren dürfen.

III. Durch diese Betrachtungen wäre das arithmetische Mittel nicht nur als die einfachste, sondern auch als die plausibelste unter allen möglichen Mittelgröfsen dargestellt. Weiter wird man indessen nicht gehen dürfen, wenn man nicht die Bemerkung II. 2. als entscheidend betrachten will. Wenn *Encke* auf den Grund der eben erwähnten Bedingungen für die Gröfse x aus der dafür aufgestellten Function ψ mit Nothwendigkeit nur eben das arithmetische Mittel herausbringt, so dürfte dies vielleicht nicht begründet sein. Und zwar würde die schwache Stelle da liegen, wo nach Aufstellung der Gleichungen

$$x = \psi(\tfrac{1}{2}(a+b), c) = \psi(\tfrac{1}{2}(a+c), b) = \psi(\tfrac{1}{2}(b+c), a)$$

die Summe $s = a+b+c$ eingeführt wird. Man könnte nemlich mit demselben Recht auch irgend eine andere symmetrische und homogene Function der Gröfsen a, b, c anwenden, um damit aus den obigen Functionen ψ je eine derselben zu eliminiren, und dann die übrigen Schlüsse *Encke's* auf dieselbe Weise folgen lassen. Setzt man z. B.

$$s = a^m + b^m + c^m,$$

woraus

$$c = \sqrt[m]{(s - a^m - b^m)} \text{ u. s. w., mithin}$$

$$x = \psi(\tfrac{1}{2}(a+b), \sqrt[m]{(s - a^m - b^m)}) = f(s, a, b) \text{ u. s. w.}$$

folgt (und wobei das Functionszeichen geändert worden ist, weil x nicht dieselbe Function von s, a, b sein kann, wie von $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\sqrt[m]{(s-a^m-b^m)}$): so kann man ebenso zu schliefsen fortfahren, nemlich: Da x eine symmetrische Function von a, b, c sein soll, s aber bereits eine solche ist, so müssen a und b aus $f(s, a, b)$ herausfallen und es mufs

$$x = fs = f(a^m + b^m + c^m)$$

sein. Da ferner $x = a$ sein mufs, wenn $a = b = c$, so mufs f eine Function von der Art sein, dafs $f(3a^m) = a$ ist. Das Zeichen f bedeutet also Division mit 3 und Ausziehung der $m$ten Wurzel, d. h. es ist

$$x = \sqrt[m]{(\tfrac{1}{3}(a^m + b^m + c^m))}.$$

Eben hiemit reducirt sich aber das Ganze auf die Aufstellung jener mehrerwähnten Grundbedingung: denn dadurch, dafs man für s die gehörige symmetrische homogene Function von a, b, c annimmt, ergiebt sich für x jede beliebige lineäre symmetrische Function derselben Gröfsen, die sich für $a = b = c$ auf a reducirt, d. h. namentlich irgend eine der in den oben aufgestellten Formen enthaltenen Functionen.

§. 6.

Zur Theorie des mittleren Fehlers.

Diese Theorie zeigt, dafs in der Praxis wohl auch andere Mittelgröfsen in Betracht kommen können, als das arithmetische Mittel; denn wenn einerseits *Bessel* gezeigt hat, dafs, unter Voraussetzung des Princips der kleinsten Quadratensumme der Fehler, die vortheilhafteste Mittelgröfse derselben die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel ihrer Quadrate (das arithmetische Mittel zweiter Ordnung) sei, obwohl die einfachste, d. h. ihr arithmetisches Mittel, abgesehen von den Zeichen, nicht sehr davon abweiche, und daher meistens dafür gebraucht werden könne: so hat andrerseits *Gaufs* gezeigt, dafs, unter Voraussetzung des arithmetischen Mittels zweiter Ordnung, als Princips des mittleren Fehlers, die Methode der kleinsten Quadrate die vortheilhafteste Combination der Beobachtungen darbiete. Es liegt aufser meinem Zweck, auf das Ganze dieser Untersuchungen einzugehen: aber über einen mit dem Hauptzweck dieser Abhandlung zusammenhängenden Punct ist Einiges zu bemerken: darüber nämlich, in wiefern das Quadrat des mittleren Fehlers, oder zunächst das arithmetische Mittel der Fehlerquadrate, vorgestellt werde durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx . x^2 \varphi x = \mu^2;$$

was *Gaufs* als Princip hingestellt, *Encke* aber von jener nicht passenden Voraussetzung aus erläutert hat. Ueberhaupt ist mir noch keine genügende Deduction des Begriffs des mittleren Fehlers zu Gesicht gekommen: sei es dafs man, mit *Gaufs*, das arithmetische Mittel zweiter Ordnung, oder, wie in der *Theoria Combinationis* bemerkt wird, mit *Laplace* das arithmetische Mittel der Fehler selbst, abgesehen vom Zeichen, dafür erklärt. Kaum ist übrigens zu bemerken nöthig, dafs der mittlere Fehler hier in anderem Sinne genommen wird, als in §. 3., und dafs es hier um den mittleren absoluten Betrag der Fehlergröfse sich handelt.

1. Wenn es auf das Mittel von Gröfsen ankommt, denen nicht gleiche Bedeutung und gleiches Gewicht, zum Resultat beizutragen, zukommen kann, so seien p_1, p_2 u. s. w. Zahlen, welche sich wie die Gewichte der Gröfsen a_1, a_2 u. s. w. verhalten. Alsdann ist das arithmetische Mittel derselben, wenn ihre Anzahl n, nicht mehr

$$\mu = \frac{1}{n} \Sigma a,$$

sondern

$$\mu = \frac{\Sigma p a}{\Sigma p};$$

welcher Ausdruck auf den vorigen sich reducirt, wenn die Gröfsen p einander gleich werden. Denn da diese ihre Verhältnisse behalten, wenn man sie mit einerlei Zahl multiplicirt, so kann man sie (wenigstens mit beliebiger Annäherung bei irrationalen Verhältnissen) auf ganze Zahlen reducirt sich vorstellen, und dann gilt der vorliegende Fall demjenigen gleich, wo man lauter Gröfsen von einerlei Gewicht hat, nämlich p_1 Gröfsen gleich a_1, p_2 Gröfsen gleich a_2 u. s. w. Das arithmetische Mittel ist aber offenbar von jenem gemeinschaftlichen Factor unabhängig, und μ behält denselben Werth, wenn auch ein unendlich grofser Factor erforderlich sein sollte, um die Verhältnifszahlen der Gewichte in Anzahlen zu verwandeln. Man kann füglich die Producte pa die *Momente der Gröfsen a in Beziehung auf ihren mittleren Werth* nennen, und sagen, dafs dieser der Quotient der Summe der Momente durch die Summe der Gewichte sei; auch wird man endlich hier ein Mittel $m$ter Ordnung bilden, wenn man statt der Gröfsen a ihre $m$ten Potenzen gebraucht und aus dem einfachen arithmetischen Mittel μ_m derselben,

$$\mu_m = \frac{\Sigma p a^m}{\Sigma p},$$

die $m$te Wurzel zieht, wobei das Product pa^m Moment der Gröfse a in $m$ter Ordnung heifsen kann.

2. Solche Gröfsen von verschiedenem Gewicht, in Beziehung auf ihren mittleren Werth, sind die Beobachtungsfehler von verschiedener Gröfse, und die Verhältnifszahlen ihrer Gewichte sind eben die ihrer relativen Häufigkeit oder Wahrscheinlichkeit, d. h. ihre Wahrscheinlichkeitscoëfficienten; weshalb auch das Product eines Fehlers, ohne Rücksicht auf das Zeichen, in seinen Wahrscheinlichkeitscoëfficienten, sein *Moment (in Beziehung auf den mittleren Fehlerwerth)*, und allgemein das Product seiner $m$ten Potenz (immer abgesehen vom Zeichen) in dieselbe Gröfse, das Moment des Fehlers in $m$ter Ordnung heifsen kann. Ueberdies ist in §. 3. IV. direct nachgewiesen worden, wie in diesem besondern Fall, entsprechend dem allgemein in No. 1. erörterten, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers mit der Anzahl seines Vorkommens in einer hinreichend grofsen Menge von Beobachtungen zusammenhängt. Es ist daher bei einer bestimmten Anzahl N

von Beobachtungsfehlern x_1, x_2 u. s. w., das Mittel μ_m ihrer $m$ten Potenzen

$$\mu_m = \frac{\Sigma x^m \varphi x}{\Sigma \varphi x};$$

und man darf blofs Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit Ni multipliciren, so drückt (§. 3. IV.) $Ni\varphi x$ die Anzahl aus, wie oft jeder Fehler x vorkommt, mithin der Nenner die Anzahl, der Zähler die Summe aller concurrirenden, nunmehr gleichgewichtigen Gröfsen; wie in No. 1. Hierauf ist $\sqrt[m]{\mu_m}$ das arithmetische Mittel $m$ter Ordnung, welches, sei es für $m=2$, oder für $m=1$, den mittleren Fehler μ selbst vorstellen soll.

3. Handelt es sich jetzt um das Mittel aller möglichen Fehler zwischen den Gränzen x und $x+\Delta x$, wie sich dieselben bei wachsender Menge von Beobachtungen immer mehr verwirklicht finden: so wird man das Intervall Δx in n gleiche Intervalle i von constantem Wahrscheinlichkeitscoëfficienten theilen, um entweder die empirische Discretheit der Fehler im Sinne von §. 3. II. festzuhalten, oder nach der Methode von §. 2. durch Verschwindenlassen von i zum Stetigen überzugehen. Man hat alsdann in

$$\mu_m = \frac{\Sigma (x+\lambda i)^m \varphi (x+\lambda i)}{\Sigma \varphi (x+\lambda i)}$$

die Summen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = n-1$ ausgedehnt; mithin erhält man, wenn man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit i multiplicirt und dann zu den Integralen übergeht, wie §. 2. (was nach der ersten der vorhin erwähnten Betrachtungsweise als eine Annäherung von Seiten der Analysis (§. 3. II.) zu betrachten wäre):

$$\frac{\int_x^{x+\Delta x} dx . x^m \varphi x}{\int_x^{x+\Delta x} dx . \varphi x}.$$

4. Handelt es sich endlich um den mittleren Fehler zwischen den absoluten Fehlergränzen $\pm g$, so reducirt sich das Integral im Nenner des letzten Ausdrucks auf die Einheit, und man hat für das Mittel der $m$ten Potenzen den Ausdruck

$$\mu_m = \int_{-g}^{g} dx . x^m . \varphi x,$$

oder, sofern man nach §. 3. I. diese Gränzen mit $\pm\infty$ vertauschen darf,

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{\infty} dx . x^m \varphi x = 2\int_0^{\infty} dx . x^m \varphi x;$$

d. h. es ist gleich der Totalsumme der Fehlermomente *m*ter Ordnung, welche annähernd durch dieses Integral ausgedrückt werden kann.

5. Der hierdurch bestimmte Werth $\sqrt[m]{\mu_m}$ des mittleren Fehlers, (indem, um allgemein zu sprechen, die Wahl des *m* zunächst unentschieden gelassen wird,) drückt nun den mittleren Betrag der auf dem betreffenden Beobachtungsgebiet überhaupt zu befürchtenden Fehler aus (*error medius metuendus*), und giebt daher einen Maafsstab zur Beurtheilung der Genauigkeit der Beobachtungen und der dadurch ermittelten Elemente. Man kann ihn auch den mittleren Fehler *a priori* nennen; als den mittlern Fehler unter allen möglichen, die in den betreffenden Beobachtungen gesetzmäfsig vorkommen können: im Gegensatz zu dem mittlern Fehler *a posteriori*, d. h. dem Mittel der in einer gegebenen Anzahl von Beobachtungen wirklich vorgekommenen Fehler, auszudrücken durch $\sqrt[m]{M_m}$, wobei in Analogie mit μ_m,

$$M_m = \frac{\Sigma x^m}{N}$$

und N die Anzahl der Beobachtungen ist, aus denen man nach dem Princip der kleinsten Quadrate (oder einem andern, wenn man will,) die wahrscheinlichsten Werthe der Elemente berechnet hat; und hieraus die, in der Voraussetzung, dafs dies die wahren Werthe seien, wirklich begangenen Fehler x_1, x_2 u. s. w. Obwohl nun die so bestimmte Gröfse nicht nur deshalb vom wahren mittleren Fehler verschieden ausfallen mufs, weil die berechneten Werthe von x nicht die reinen Beobachtungsfehler sind, sondern auch deshalb, weil nicht alle möglichen Fehler nach dem Gesetz ihrer relativen Häufigkeit darin vorkommen: so findet doch, je gröfser die Menge der Beobachtungen, um so mehr nicht nur Letzteres statt, sondern um so reiner treten auch die Fehler der einzelnen Beobachtungen hervor, indem sich die wahrscheinlichen Werthe der Elemente um so mehr den wahren nähern desto mehr wird also der mittlere Fehler *a posteriori* mit dem mittleren Fehler *a priori* coïncidiren, und es ist daher das aus einer einigermafsen beträchtlichen Anzahl guter Beobachtungen ermittelte aposteriorische Mittel jedenfalls ein Näherungswerth für das apriorische, welches seinerseits dem Grade der Präcision als umgekehrt proportional gelten darf. Da endlich Letzteres, oder obiges Integral, nicht berechnet werden kann, ohne dafs nicht nur die Form der Function φx, sondern auch ihre Constante bekannt ist, diese aber eben erst aus den Beobachtungen zu ermitteln ist, so kann hiezu eben die Gröfse $\sqrt[m]{M_m}$ dienen. Dies führt noch

§. 7.

Zu einigen Bemerkungen über die Constante der Function φx.

Es handelt sich indessen dabei nur mehr um eine Zusammenstellung der hierher gehörigen Sätze, als um eine weitere Ausführung. Es sei speciell

$$\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

also

$$h = \varphi 0 . \sqrt{\pi};$$

was aber freilich nicht zur Bestimmung von h dienen kann, da $\varphi 0$ ebenso unbekannt ist wie h. Es ist dann ferner die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler zwischen den Gränzen $\pm a$ liege, indem überdies $t = hx$ gesetzt wird,

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t=-ah}^{t=+ah} dt . e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t=ah} dt . e^{-t^2};$$

desgleichen diejenige w', dafs bei einem andern Systeme von Beobachtungen, welches durch die Constante h' characterisirt wird, ein Fehler zwischen den Gränzen $\pm a'$ liege,

$$w' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t=a'h'} dt . e^{-t^2}.$$

1. Dafs nun überhaupt die Constante der Function φx den Genauigkeitsgrad in dem durch sie characterisirten System von Beobachtungen bezeichnet, erhellet durch Vergleichung gleich wahrscheinlicher Fehler in beiden Systemen: denn setzt man $w = w'$, so folgt $ah = a'h'$; d. h. die Constanten h sind umgekehrt proportional den Intervallen a zu beiden Seiten der Null, denen einerlei Wahrscheinlichkeit, den Fehler eines Beobachtungsresultat zu erhalten, zukommt. Je kleiner aber dieses Intervall, d. h. je näher bei gleicher Wahrscheinlichkeit der Fehler dem Nullwerth liegt: desto genauer sind die betreffenden Beobachtungen. Die Constante der Function φx ist mithin dem Grade der Präcision direct proportional, wenn jenes Intervall, wozu man berechtigt ist, als demselben umgekehrt proportional gesetzt wird.

2. Aufser dem Werth $w = 1$ ist der Werth $w = \frac{1}{2}$ von besonderem Belang, indem der zugehörige Werth r von a, der deshalb von *Gaufs* den besonderen Namen des *wahrscheinlichen Fehlers* erhalten hat, das Feld der Wahrscheinlichkeit auf der Seite der positiven wie der negativen Fehler halbirt, so dafs ein Fehler innerhalb der Gränzen $\pm r$ gleich wahr-

scheinlich ist mit einem aufserhalb derselben. Heifst daher der zugehörige Werth von t, dem $w = \frac{1}{2}$ entspricht, ϱ, der (wie r) eine rein analytische Zahl ist ($\varrho = 0{,}4769\ldots$), so ist $\varrho = rh$, mithin die Constante h dem wahrscheinlichen Fehler umgekehrt proportional, und dieser dem Grade der Präcision: eine Betrachtung, welche zu der in No. 1. wie ein besonderer Fall sich verhält, indem mit $w = w' = \frac{1}{2}$ auch

$$\varrho = rh = r'h' \text{ gegeben ist.}$$

3. Was jetzt die Relation zwischen h und μ_m betrifft, welche Gröfse bereits in §. 6. mit dem Grade der Präcision in Beziehung gesetzt wurde, so erhält man für den nunmehrigen speciellen Werth von φx, je nachdem m gerade oder ungerade ist, $m = 2\lambda$ oder $m = 2\lambda + 1$, nemlich

$$\mu_{2\lambda} = \frac{1.3.5\ldots(2\lambda - 1)}{2^\lambda h^{2\lambda}} \quad \text{oder} \quad \mu_{2\lambda+1} = \frac{1.2.3\ldots\lambda}{h^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}};$$

mithin ist, welche in der Form $\sqrt[m]{\mu_m}$ enthaltene Mittelgröfse man auch für den mittleren Fehler erklären mag, dieser, wie der wahrscheinliche Fehler in No. 2., der Constante h umgekehrt proportional, und insbesondere ist, je nachdem man μ_1 oder $\sqrt{\mu_2}$ für den mittleren Fehler μ erklärt, entweder $\mu = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$, oder $\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$. Accentuirt man daher zur Unterscheidung die ersten dieser Werthe und vergleicht damit den Ausdruck des wahrscheinlichen Fehlers, so hat man folgende Werthe von h:

$$h = \frac{\varrho}{r} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{1}{\mu'\sqrt{\pi}}.$$

4. Ist nun allgemein

$$M_m = \frac{\Sigma x^m}{N}$$

das arithmetische Mittel der $m$ten Potenzen von N wirklichen, nach dem Princip der kleinsten Quadrate berechneten Beobachtungsfehlern, also die dem μ_m entsprechende empirische Gröfse, und entsprechen eben so M, M' den Ausdrücken μ, μ', so dafs

$$M = \sqrt{\left(\frac{\Sigma x^2}{N}\right)}, \qquad M' = \frac{\Sigma x}{N}$$

ist, in welch-letzterem die x abgesehen vom Zeichen zu nehmen sind: so hat man nach den Relationen zwischen h einerseits und μ, μ' andererseits, indem H und H' die zu M und M' gehörigen Werthe vorstellen, die man nämlich nicht als gleich annehmen darf:

$$H = \frac{1}{M\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad H' = \frac{1}{M'\sqrt{\pi}}.$$

Der erste dieser Ausdrücke macht nun allerdings die Gröfse P (§. 4.), nachdem darin die kleinste Quadratensumme der Fehler $\Sigma x^2 = NM^2$, als eine nunmehr gegebene constante Gröfse, substituirt worden ist, d. h.

$$P = \frac{h^N}{(\sqrt{\pi})^N} e^{-h^2 NM^2}$$

zu einem Maximum in Beziehung auf h, dessen Werth

$$P = (M\sqrt{(2\pi e)^{-N}}$$

wäre; und vielleicht kann auch dieser Umstand zu einer Empfehlung von $\dot{M}$ gegenüber andern in $\sqrt[m]{M_m}$ enthaltenen Mittelgröfsen dienen: allein umgekehrt, mit *Encke*, dieses Maximum als Princip für die Bestimmung der Constante h durch den mittleren Fehler M zu gebrauchen, scheint mir nicht ganz unbedenklich: theils weil die Forderung dieses Maximums überhaupt nicht zwingend motivirt sein dürfte, zumal da man dann erwarten dürfte, sogleich bei Aufstellung des Princips in §. 4. die Constante der Function φx mit zu den unabhängigen Veränderlichen gezählt zu sehen, in Bezug auf welche die Function P ein Maximum sein soll: theils weil, wenn man M' für den mittleren Fehler erklärt, die Schlüsse von *Encke* gleich anwendbar wären und als Werth von h durch die Maximumsbedingung,

$$H' = \frac{1}{M'\sqrt{2}} \quad \text{anstatt} \quad H' = \frac{1}{M'\sqrt{\pi}}$$

geben würden.

Anm. Dies wären die Puncte der behandelten Theorie, in welchen ich Dieses oder Jenes berichtigt, erläutert oder beigefügt zu haben glaube. Ich schliefse mit einer historischen Bemerkung über die mir, erst nachdem ich Vorstehendes niedergeschrieben, zugekommene Abhandlung des verstorbenen *Hauber* über die „Theorie der mittleren Werthe" in der Baumgärtner-Ettingshausenschen Zeitschrift, wo diese Theorie nicht blofs in Betreff der Beobachtungsfehler, sondern allgemein durchgeführt ist; alle Fälle stetiger Gröfsen mit ihren Wahrscheinlichkeiten umfassend. Diese Abhandlung gehört zu denjenigen, welche in Bezug auf unsern Gegenstand den in der Einleitung besprochenen Grund-Irrthum vermeiden; und hat folgende Deduction der Differentialfunction $\varphi x . dx$, die mit der obigen (§. 2.) zu vergleichen ich dem Leser überlasse. Nachdem bemerkt worden

ist, dafs die Wahrscheinlichkeit irgend eines speciellen Werths der unbestimmten Gröfse x unendlich klein, diejenige aber, dafs er zwischen die Gränzen α und w der möglichen Werthe falle, der Einheit gleich sei, wird die Wahrscheinlichkeit, dafs der Werth zwischen α und x falle, wo x irgend ein Werth zwischen α und w ist, als eine Gröfse $W < 1$ aufgestellt, und dann die, dafs er zwischen α und x' falle, wo x' zwischen x und w liegt, mit W' bezeichnet; woraus folgt, dafs diejenige, dafs er zwischen x und x' liege, $W' - W = \Delta W$ sei; welche Differenz, wenn die Gränzen x und x' unendlich nahe zusammenrücken, oder wenn x' in $x + dx$ übergeht, zum Differential dW wird. Hier sei W eine Function von x, die verschwinde für $x = \alpha$, auf die Einheit sich reducire für $x = w$, und für alle Zwischenwerthe von x ihre Werthe zwischen 0 und 1 habe. Da nun im Allgemeinen (so wird nun die Function φx eingeführt) auch $\frac{dW}{dx}$ eine Function von x sein werde, so sei, indem man sie φx nenne, $dW = \varphi x . dx$. Läfst sich gleich hiegegen nichts einwenden, so möchte doch andererseits die Definition des mittlern Werths, die an der Spitze der Abhandlung steht, verfehlt sein, wenn darunter die Summe der einzelnen Werthe, multiplicirt mit ihren respectiven Wahrscheinlichkeiten, verstanden wird. Vielmehr ist, gemäfs §. 6., wenn diese Gröfse Summe der Momente heifst, diese Summe, dividirt durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten, der *allgemeine* Ausdruck des mittlern Werths. Dieser Quotient reducirt sich aber immer auf die Summe der Momente, wenn *alle* möglichen Werthe von x concurriren, indem dann die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf die Einheit sich reducirt, als Ausdruck der Gewifsheit: ein Fall welcher übrigens von *Hauber* allein gebraucht wird.

Stuttgart im April 1843.

23.

Ueber eine Methode den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung zu finden.

(Von Hrn. Dr. *L. J. Magnus.*)

Es ist bekannt, dafs, wenn man zwischen zwei Gleichungen, welche in Beziehung auf zwei darin enthaltene Gröfsen x, y respective vom Grade h und k sind, eine dieser Gröfsen, etwa y, eliminirt, die Finalgleichung in x auf's höchste vom Grade hk ist; dafs diese Endgleichung aber auch von einem niedrigeren Grade sein kann. Im 22ten Bande S. 178 dieses Journals befindet sich eine Abhandlung, in welcher eine Methode angegeben ist, die dazu dienen soll, den Grad der Finalgleichung auf eine einfache Weise zu finden. Diese Methode besteht in Folgendem.

Es seien

$$1.\quad f(x,y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \dots + A_{m-1} y + A_m = 0,$$
$$2.\quad \varphi(x,y) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \dots + B_{n-1} y + B_n = 0$$

die beiden Gleichungen, in welchen A und B mit den angehängten Zeigern ganze Polynome in x bedeuten. Alsdann ist

$$3.\quad \psi(x) = B_0^m . f(x,y_1) . f(x,y_2) \dots f(x,y_n) = 0,$$

wo $y_1, y_2, \dots y_n$ die Wurzeln der Gleichung (2.) bezeichnen, die Finalgleichung der Elimination, und, nach der in der genannten Abhandlung angegebenen Methode, soll man den Grad dieser Gleichung folgendermafsen finden können. Man suche die ersten Glieder $c_1 x^{h_1}$, $c_2 x^{h_2}$, ... $c_n x^{h_n}$ derjenigen Reihen auf, welche die Wurzeln $y_1, y_2, \dots y_n$ nach *fallenden* Potenzen von x darstellen, substituire diese ersten Glieder für $y_1, y_2, \dots y_n$ in $f(x,y_1)$, $f(x,y_2)$, ... $f(x,y_n)$, bestimme hierauf in einer jeden der Functionen $f(x, c_1 x^{h_1})$, $f(x, c_2 x^{h_2})$, ... $f(x, c_n x^{h_n})$ den höchsten Exponenten von x, oder, was dasselbe sein soll, den Grad dieser Functionen, welche mit $k_1, k_2, \dots k_n$, so wie der Grad von B_0 mit b, bezeichnet werden mögen: alsdann ist

$$4.\quad g = mb + k_1 + k_2 \dots + k_n$$

der Grad der Finalgleichung $\psi(x) = 0$.

In der genannten Abhandlung wird zuerst bewiesen, dafs

$$B_0^m . f(x, y_1) . f(x, y_2) .... f(x, y_n) = 0$$

die Finalgleichung sei, wenn darin statt $y_1, y_2, ... y_n$ die vollständigen Wurzeln der Gleichung (2.) sind. Dann heifst es in jener Abhandlung weiter: „Entwickelt man die Wurzeln $y_1, y_2, ... y_n$ der Glei-„chung (2.) nach *fallenden* Potenzen von x, und setzt die erhaltenen Rei-„hen statt jener in den vorstehenden Ausdruck, so werden alle gebroche-„nen und negativen Potenzen von x sich gegenseitig aufheben, und das „Polynom $\psi(x)$ wird unverändert, wie vorhin, hervorgehen. Da nur der „Grad von $\psi(x)$ verlangt wird, so setze man statt jener Reihen nur ihre „ersten Glieder, welche $c_1 x^{k_1}$, $c_2 x^{k_2}$, ... $c_n x^{k_n}$ sein mögen." Der Beweis dafs diese zuletzt angegebene Substitution der Functionen $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$, ... $f(x, y_n)$, und somit auch der Function $\psi(x)$, denselben Grad geben werde, als die Substitution der vollständigen Reihen, worauf es doch hauptsächlich ankommt: dieser Beweis ist in der Abhandlung nicht geführt; er kann auch nicht geführt werden, da sich die Sache nicht immer so verhält; woher es denn kommt, dafs die in Rede stehende Methode zuweilen das verlangte Resultat nicht giebt. Wir wollen dies an einem Beispiele zeigen. Es seien

5. $f(x, y) = y^3 - (7x - 7)y^2 + (14x^2 - 30x + 7)y - 8x^3 + 20x^2 + 13x - 15 = 0,$
6. $\varphi(x, y) = y^2 - (6x - 4)y + 8x^2 - 12x + 5 =$

die gegebenen Gleichungen. Hier findet man aus (6.) $c_1 x^{k_1} = 2x$, $c_2 x^{k_2} = 4x$, und, wenn man diese Ausdrücke $2x$ und $4x$ nacheinander für y in (5.) setzt, respective

$$-12x^2 + 27x - 15 \quad \text{und} \quad 12x^2 + 41x - 15;$$

also Polynome zweiten Grades, und demnach $k_1 = k_2 = 2$. Setzt man aber die Wurzeln der Gleichung (6.), nämlich

$$y_1 = 3x - 2 - \sqrt{(x^2 - 1)}; \qquad y_2 = 3x - 2 + \sqrt{(x^2 - 1)}$$

für y in (5.), so kommt

7. $-4x^2 + 16x - 10 - (4x - 10)\sqrt{(x^2 - 1)}$ und $-4x^2 + 16x - 10 + (4x - 10)\sqrt{(x^2 - 1)}$.

Wenn man diese beiden Ausdrücke in Reihen nach fallenden Potenzen von x entwickelte, so würde das erste Glied der ersten Reihe vom 2ten, das erste Glied der zweiten Reihe aber vom 1sten Grade sein. Man müfste also nicht, wie die in Rede stehende Methode vorschreibt, $k_1 = k_2 = 2$, sondern $k_1 = 2$ und $k_2 = 1$ nehmen. Nun findet man, da $B_0 = 1$, $b = 0$ ist, aus (4.), wenn man $k_1 = k_2 = 2$ nimmt, $g = 4$, und wenn man $k_1 = 2$,

$k_2 = 1$ setzt, $g = 3$. Die angeführte Methode giebt also für den Grad der Finalgleichung die Zahl 4, während sie nur die Zahl 3 geben sollte. In der That ergiebt sich, man mag die Elimination von y zwischen (5.) und (6.) auf welche Weise man wolle ausführen,

$$12x^3 - 63x^2 + 100x - 50 = 0$$

für die Endgleichung dieser Elimination, welche, wie man sieht, vom 3ten Grade ist; auch giebt die Multiplication der beiden Ausdrücke (7.) den ersten Theil dieser Gleichung; wie es natürlich sein mufs.

Wir hätten statt der numerischen Gleichungen (5.) und (6.) eben sowohl ein Beispiel in literalen Gleichungen geben können, bei welchen die mehrerwähnte Methode den Grad der Endgleichung zu hoch angiebt; wie wir denn wirklich diese Gleichungen (5.) und (6.) aus zwei solchen literalen Gleichungen, die wir nun, der nicht unbedeutenden Complication der Buchstaben-Ausdrücke wegen, nicht abdrucken lassen wollen, durch willkürliche Zahlen-Annahme für die darin enthaltenen Buchstaben gebildet haben.

Die Methode liefse sich vielleicht durch eine Modification des Verfahrens vervollkommnen; doch, wie wir fürchten, wahrscheinlich nur auf Kosten der Einfachheit; was wir indessen billigerweise dem Erfinder der Methode in Rede überlassen.

Anzeige.

Der Briefwechsel zwischen *Euler*, *Goldbach*, *Dan. Bernoulli*, *Nic. Fufs* etc., dessen Herausgabe der Herr Staatsrath *Fufs*, der verdiente Sohn des Letztgenannten, übernommen hatte, und von welchem auch in diesem Journal ankündigend die Rede war, ist nunmehr in diesem Jahre erschienen. Diese schöne Sammlung *bedarf* zwar warlich hier keiner Anzeige, allein das Journal hält es, auch seinerseits diese wichtige Schrift anzuzeigen, für Pflicht.

Die Sammlung füllt zwei starke Octav-Bände, zusammen von etwa 96 Bogen vortrefflich gedrucktem Text, mit 8 Figurentafeln, 8 Facsimiles der Handschriften der berühmten Verfasser der Briefe, und den Bildnissen von *Euler* und *Dan. Bernoulli* in schönen Stahlstichen. Der Titel des Buchs ist

Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIme siècle, précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits, et publiée sous les auspices de l'académie imp. des sciences de St. Petersbourg par P. H. Fufs, conseiller d'état actuel de S. M. l'Empéreur de toutes les Russies etc. St. Petersbourg 1843.

In Deutschland ist das Buch in allen Buchhandlungen zu haben.

Den ersten Band eröffnet eine interessante Vorrede des Herrn Herausgebers, Nachrichten von den *Bernoulli's*, von *Goldbach* etc. enthaltend. Darauf folgen Nachrichten von dem Leben und den Arbeiten *Leonh. Eulers:* sodann ein so lange gewünschtes systematisches Verzeichnifs seiner Werke; auch der noch nicht herausgegebenen. Die Zahl derselben steigt auf nicht weniger als 756. Hierauf füllt den ganzen ersten Band die Correspondenz zwischen *Euler* und *Goldbach*. Etwa die Hälfte der 177 Briefe ist von *Euler*. Der Inhalt dieser Briefe erstreckt sich über alle Theile der reinen Mathematik, so wie auch über mancherlei Anwendungen derselben, und auf physicalische Gegenstände. Sehr Vieles findet sich darin auch über die Theorie der Zahlen, und es scheint, *Euler* sei auf seine Untersuchungen und Entdeckungen in diesem schönen Theile der Mathematik auch mit durch *Goldbach* geführt worden.

Der zweite Band enthält die Correspondenz zwischen *L. Euler*, den *Bernoulli's*, *Fufs* und *Goldbach*. Zuerst finden sich 14 Briefe von *J. Bernoulli*, dem Vater, an *L. Euler*; darauf 17 zwischen *Nic. Bernoulli* und *Goldbach* gewechselte Briefe; dann 71 Briefe zwischen *Dan. Bernoulli* und *Goldbach*; dann 58 Briefe von *Dan. Bernoulli* an *Euler;* hierauf 5 Briefe von *Dan. Bernoulli* an *Nic. Fufs*, und dann 6 Briefe von *Nic. Bernoulli* an *Euler*; wieder über alle Theile der Mathematik und über Physicalisches sich erstreckend.

Einen Auszug aus diesen Schätzen auch nur andeutungsweise zu geben, ist nicht möglich, aber, um etwa zum Lesen der Sammlung anregen zu helfen, auch nicht nöthig: denn, wie reich an Inhalt der Briefwechsel solcher Heroen der Mathematik sein müsse, läfst sich denken. Besonders interessant wird es für jeden Mathematiker sein, aus diesen Briefen zu sehen, wie die grofsen Entdeckungen, mit welchen die Geometer des vorigen Jahrhunderts ihre Wissenschaft bereicherten, allmälig sich entwickelten; und gar Vieles ist aus diesen Briefen zu lernen.

Der Herr Staatsrath *Fufs* hat durch die Herausgabe dieser Sammlung seinen schon so wesentlichen Verdiensten um die Wissenschaften in der That ein neues Verdienst hinzugefügt, und die Mathematiker werden, was ihnen hier dargeboten wird, gewifs mit Dank aufnehmen.

Möchte doch auch die Hoffnung auf eine Gesammt-Ausgabe der Werke des grofsen *Eulers* in Erfüllung gehen! Der seltene Mann lehrt Neues noch jetzt, 60 Jahre nach seinem Tode!

Crelle. Journal

...Jean L. Euler.

....

......J'ai vû ... et quatenus divisores omnes, & singuli ... fractionum, quarum numeratores sint similes litera majuscula ... cum literis praeponatur signum + vel −, prout denominator

observato quod Vitrorum concavorum distantia focales

$\overline{a}$ ... iva, convexorum negativa) et ... summa fractionum

... omnium quas ingrediuntur litera d (distantia focalis

Radii lucis ... focalis Vitri ultimi, ad distantiam Dq Vitri ultimi ad

convexa A, ...

vel divergunt ... Exemplum 1.

D tum esse omnes. Ergo a, b, c, d sunt negativa omnes.

Fractiones hinc oriunda

$$\frac{q1}{1} \qquad \frac{qA}{a}$$

$$\frac{qB}{b} \quad \ldots\ldots \quad \frac{qAB}{ab}$$

$$\frac{qC}{c} \quad \frac{qAC}{ac} \quad \frac{qBC}{bc} \quad \frac{qABC}{abc}$$

id est fractiones ... $\frac{qD}{d}, \frac{qAD}{ad}, \frac{qBD}{bd}, \frac{qABD}{abd}, \frac{qCD}{cd}, \frac{qACD}{acd}, \frac{qBCD}{bcd}, \frac{qABCD}{abcd}$

numerator ... igitur Dq =

$$\frac{\frac{qD}{d} - \frac{qACD}{acd} - \frac{qBCD}{bcd} + \frac{qAD}{ad} + \frac{qBD}{bd} + \frac{qCD}{cd} - \frac{qD}{d}}{+\frac{qAB}{ab} + \frac{qAC}{ac} + \frac{qAD}{ad} + \frac{qBC}{bc} + \frac{qBD}{bd} + \frac{qCD}{cd} - \frac{qA}{a} - \frac{qB}{b} - \frac{qC}{c} \cdot \frac{qD}{d} + \frac{q1}{1}}$$

Nam ... Hug...

Sed, eodem ... Exemplum 2.

... sive a, c negativa, b, d positiva, erit quoque Dq =

Ergo ex =

$$\frac{\frac{qD}{d} + \frac{qACD}{acd} - \frac{qBCD}{bcd} - \frac{qAD}{ad} + \frac{qBD}{bd} - \frac{qCD}{cd} + \frac{qD}{d}}{\frac{qAB}{ab} + \frac{qAC}{ac} - \frac{qAD}{ad} - \frac{qBC}{bc} + \frac{qBD}{bd} - \frac{qCD}{cd} - \frac{qA}{a} + \frac{qB}{b} - \frac{qC}{c} + \frac{qD}{d} + \frac{q1}{1}}$$

habetur Dq =

2. Quod si ..., determinare situm, locum, & magnitudinem appa...

Dq, distantiam

ultimum ... de l'optique que M. Cotes avoit donné une Regle ...

... paroit par des principes tres differents. Aussi je ne vous

3. Quod si ... ver Cette ... des fractions que vous apellés continues,

ad inveniendum ... ... Mais je suis obligé d'assurer. C'est par les

concava ... ... considerations & du zele ardent avec lequel

Designent ...

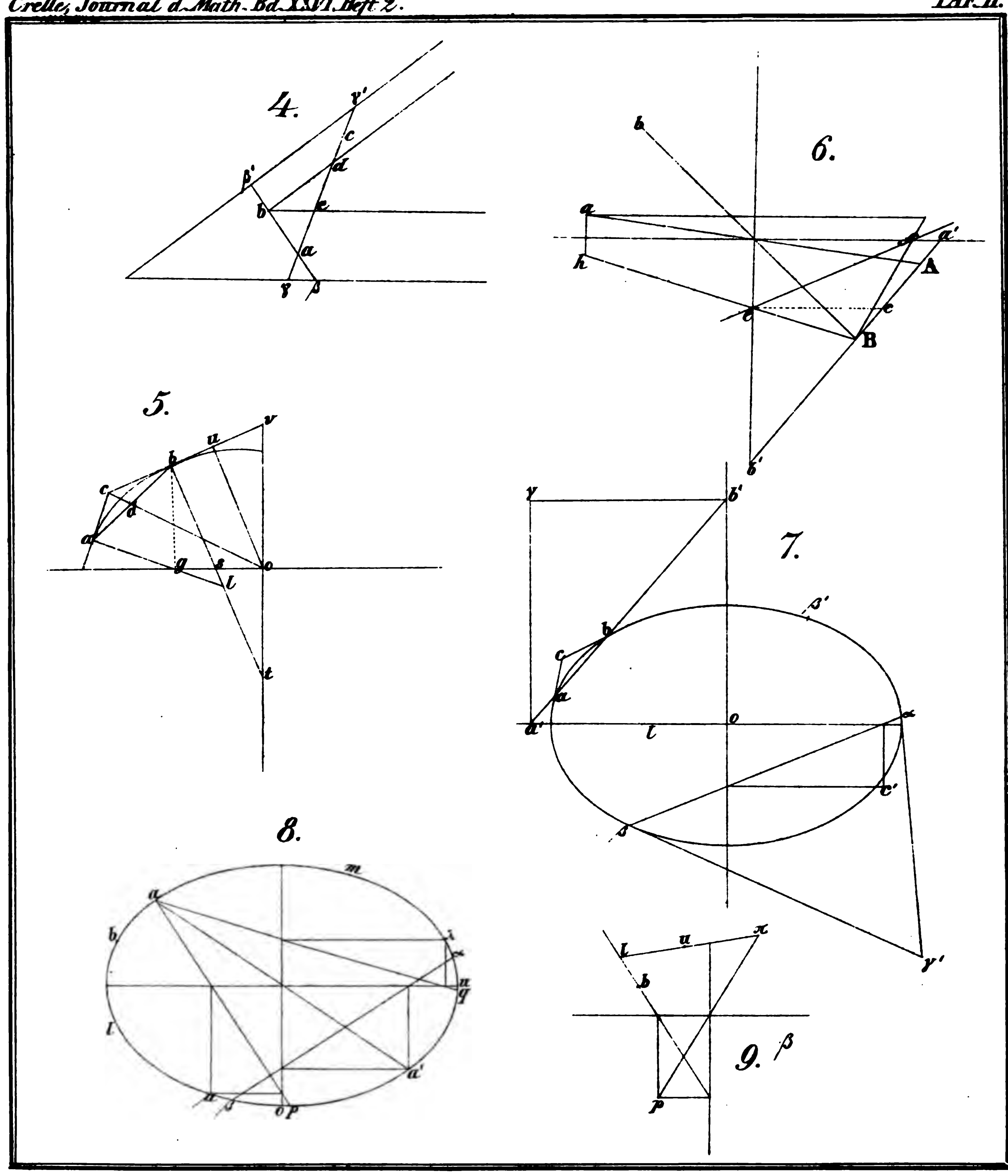
... A, B

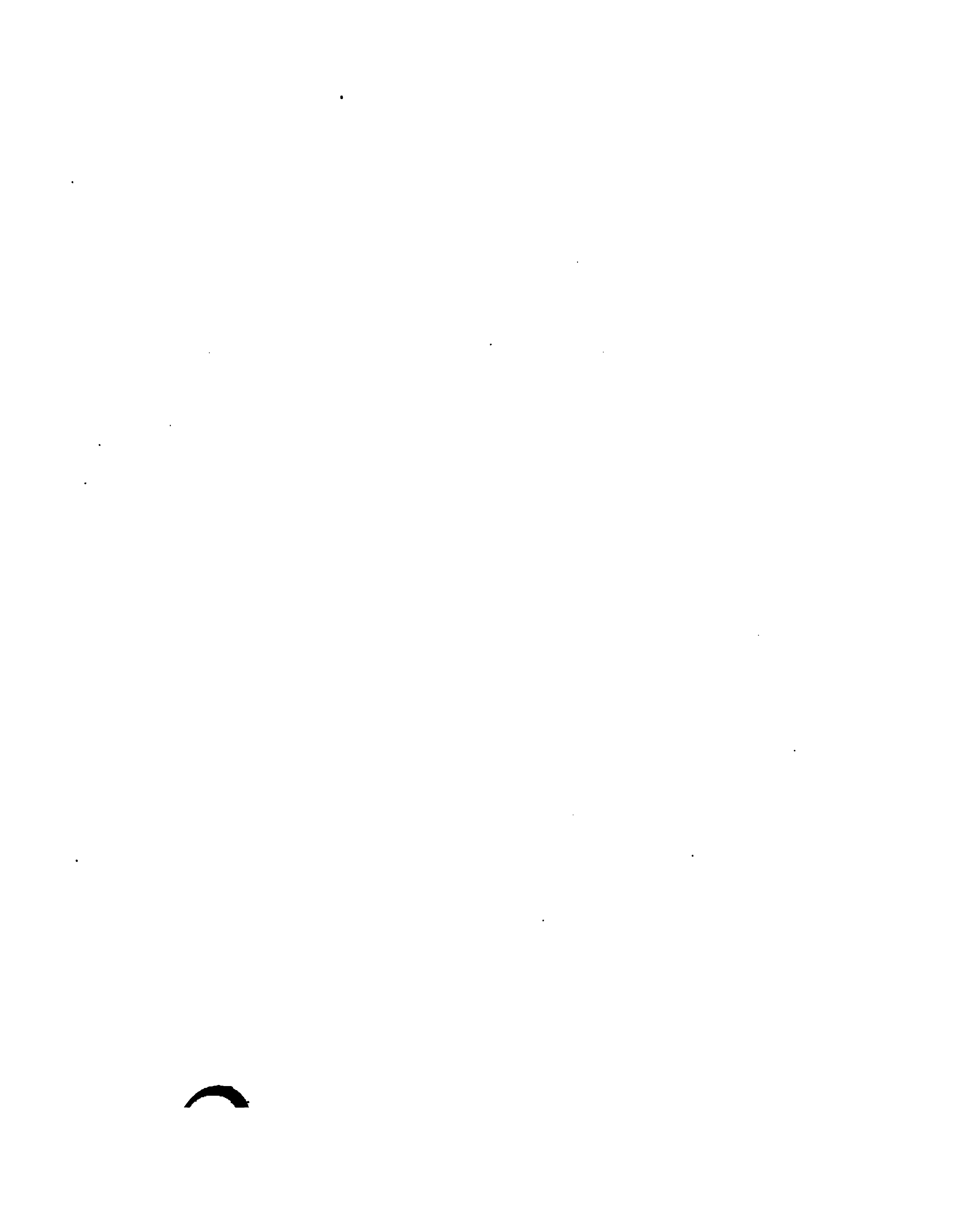
QABD, QBCD, ...

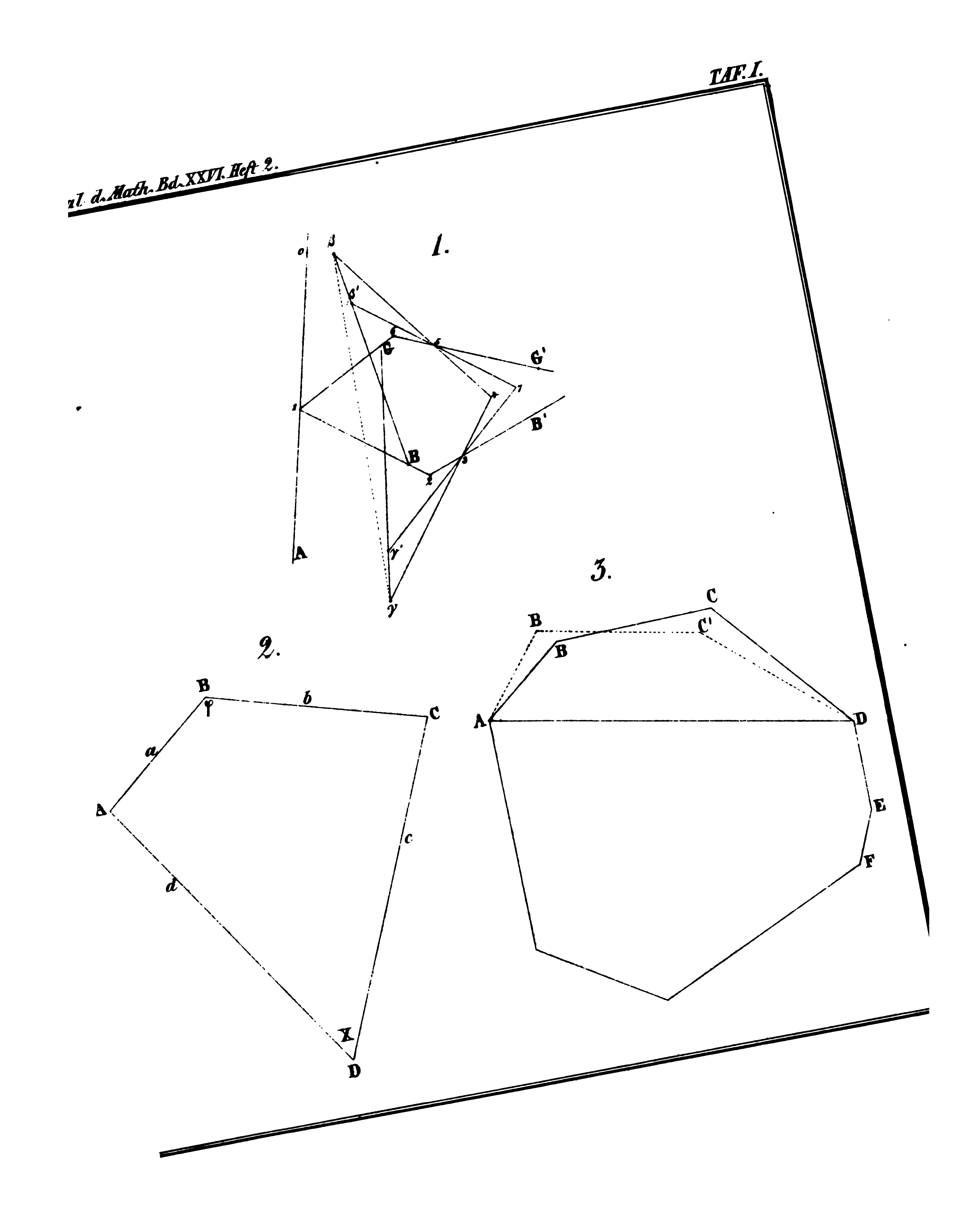
QABCD, ...

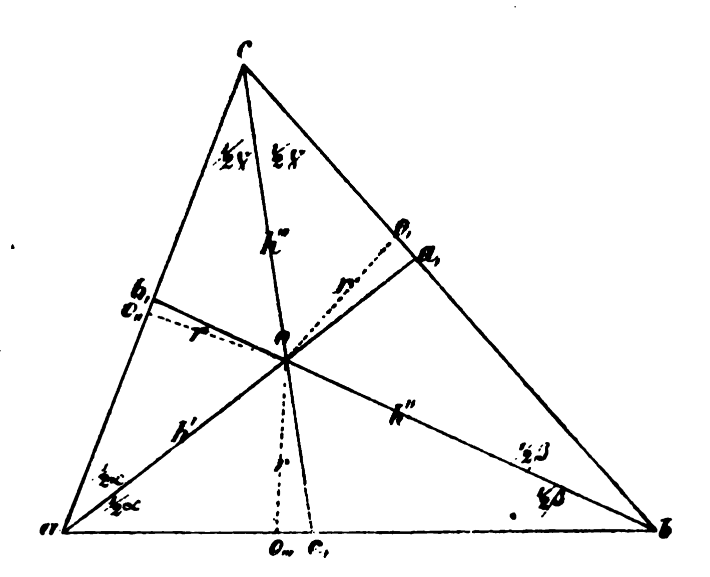
Votre tres humble & tres obeissant

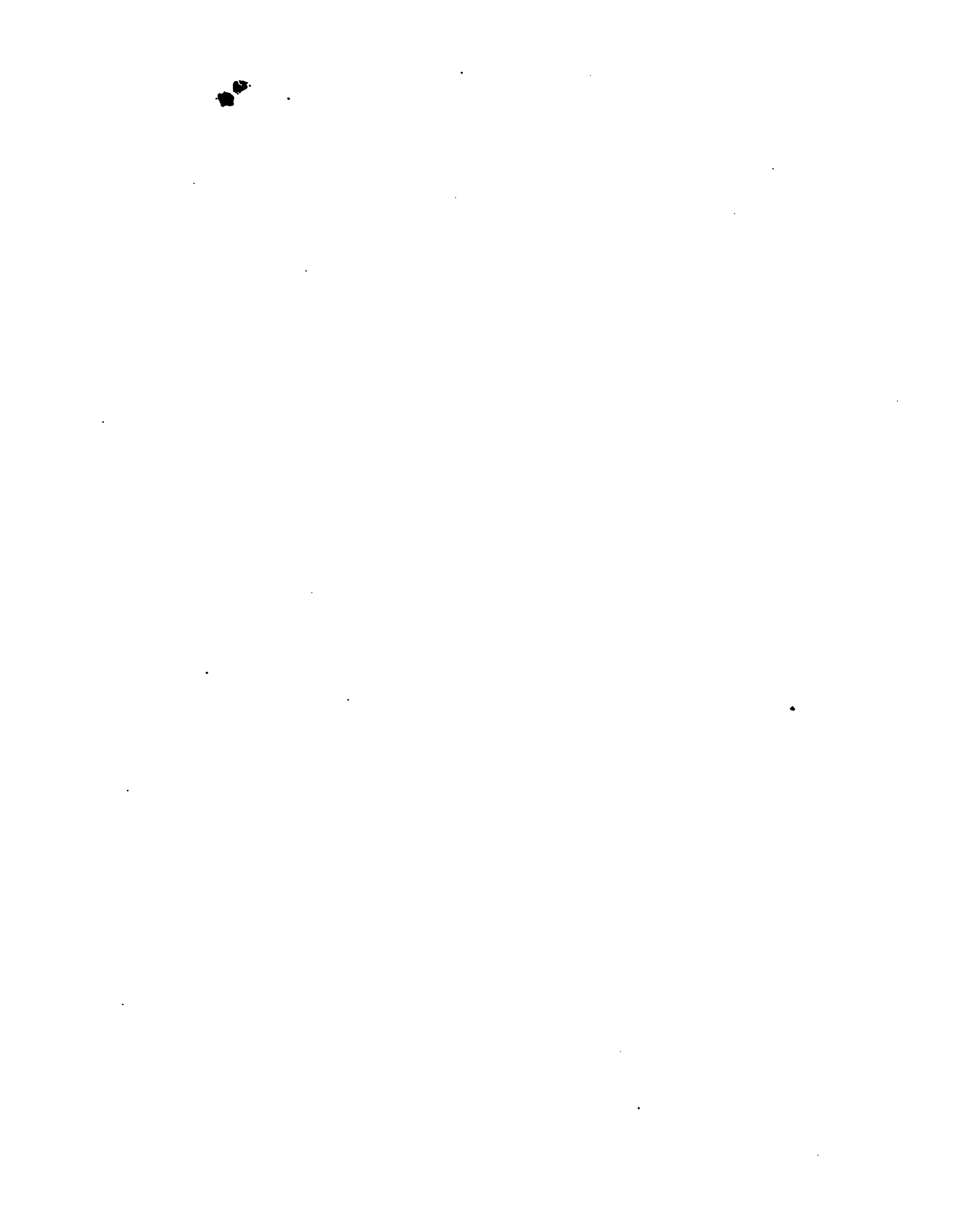
serviteur G. Cramer


4.
γ'
c
d
β'
b
e
a
γ
β
6.
b
a
a'
h
A
c
e
B
b'
5.
v
u
b
c
d
a
g
s
o
l
t
7.
y
b'
β'
b
c
a
a'
o
l
α
c'
δ
γ'
8.
m
a
b
i
α
n
q
l
a'
u
δ
o
p
9.
l
u
x
b
β
p




1.
2.
3.
A
B
C
D
X
a
b
c
d
G
G'
B'
C'
E
F


c
h''
h'
h''
a
b



STORAGI

